前　言

一般公认，黎曼几何是从德国数学家 B. Riemann 的有名就职演说"论作为几何学基础的假设"(1854 年)发端的．后经 E. B. Christoffel, L. Bianchi 及 C. G. Ricci 等人进一步完善和拓广，成为 A. Einstein 创立广义相对论 (1915 年)的有力数学工具．此后黎曼几何得到了蓬勃发展，特别是 E. Cartan，他建立的外微分形式和活动标架法，沟通了 Lie 群与黎曼几何的联系，为黎曼几何的深入发展开辟了广阔的前景，影响极为深远．近半个世纪来，黎曼几何的研究从局部发展到整体，产生了许多深刻的并在其他数学分支(如代数拓扑学，偏微分方程，多复变函数论等)及现代物理学中有重要作用的结果．时至今日，黎曼几何无论在基础理论上还是在实际应用上，都日益显示出它的重要性和巨大价值．

本书是以大学高年级学生及低年级研究生为对象而写的有关微分流形和黎曼几何的初步知识，曾作为讲义在杭州大学试讲多次，几经增删修改而成．内容共分五章：

第一章　准备知识；

第二章　微分流形；

第三章　联络与曲率；

第四章　测地线；

第五章　黎曼子流形；

另加四个附录，以便于阅读和充实内容．

对于已经熟悉多元微积分和多线性代数的读者，可以略去第一章．如果已掌握微分流形方面的内容，则也可以跳过第二章．由于这是一本入门的"初步"，不可能面面俱到；不少内容只得忍痛割爱，但尽可能注出参考文献．书中的习题，有较易的练习，也有较

难的专题，目的是引导读者作进一步的研究．因此，本书习题可看作正文的有机补充，应尽可能浏览一下．

限于笔者水平，书中不妥之处在所难免，欢迎大家提出宝贵意见，以供将来作进一步修订之用．

最后，对高等教育出版社的大力支持谨致深切谢意．

编　者

一九九〇年六月

#《黎曼几何初步》目录

第一章 准备知识

§1 欧氏空间的映射

1.1 映射的微分 链规则

设 $\boldsymbol{R}^m$ 是 m 个有序实数组的全体，它的点用一个字母表示，记作 $x=(x^1, \cdots, x^m)$，其中 $x^i\in\boldsymbol{R}(i=1, \cdots, m)$ 称为点 x 的第 i 个坐标. 以

$$d(x, y)=\|x-y\|=\left[\sum_{i=1}^{m}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2} \qquad (1.1.1)$$

表示 $\boldsymbol{R}^m$ 中两点 x 与 y 之间的距离，这时 $\boldsymbol{R}^m$ 成为一个度量空间，称为欧氏空间，常用 $\boldsymbol{E}^m$ 表示之. 坐标全为 0 的一点 O 称为原点；于是 x 也可看作从原点出发的一个向量，它的长度 $\|x\|=\|x-0\|$. 以后在不引起混淆的地方，我们不再区分 $\boldsymbol{R}^m$ 和 $\boldsymbol{E}^m$.

设 U 为 $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集，F 是 U 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的映射

$$F: U\to F(U)\subset\boldsymbol{R}^n, \quad x\mapsto y=F(x),$$

其中 $x=(x^1, \cdots, x^m)$, $y=(y^1, \cdots, y^n)$.

用 $\pi^\alpha: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 表示到第 α 个坐标的投影，即

$$\pi^\alpha(y^1, \cdots, y^n)=y^\alpha \qquad (\alpha=1, \cdots, n), \qquad (1.1.2)$$

则映射 F 可表示成

$$y=F(x)=(f^1(x), \cdots, f^n(x)), \quad x\in U, \qquad (1.1.3)$$

其中 $f^\alpha=\pi^\alpha\circ F: U\to\boldsymbol{R}$ 是通常的 m 元函数，它称为映射 F 的第 α 个分量函数. 反过来，借助(1.1.3)式，任何 n 个定义在 U 上的 m 元函数 $f^1, \cdots, f^n$，确定了一个映射 $F: U\to\boldsymbol{R}^n$，$F(x)$ 的坐标函数为 $(f^1(x), \cdots, f^n(x))$.

例. 设 $m=1$, U 为 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间 (a, b), 映射 $F: U \to \boldsymbol{R}^n$, $t \mapsto F(t)=(f^1(t), \cdots, f^n(t))$ $(t \in (a, b))$ 即为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的曲线.

定义 1.1.1 如果 F 的每一个分量函数在点 $a \in U$ (或在 U 上) 是可微分的 (C^k, C^∞, C^ω), 则称映射 F 在点 a (或在 U 上) **是可微分的** (C^k, C^∞, C^ω). 一个 C^∞ 映射亦称**光滑映射**.

如果 F 在 U 上可微分, 则矩阵

$$\frac{\partial(f^1, \cdots, f^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1}, & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1}, & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

在 U 的每一点有定义, 此矩阵的每一个元素均为 U 上的函数. 当 F 为 C^k 映射时, 它们是 U 上的 C^{k-1} 函数. 上述矩阵称为映射 F 的 Jacobi **矩阵**, 简记为 DF.

定理 1.1.1 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集, 映射 $F: U \to \boldsymbol{R}^n$ 在点 $a \in U$ 为可微的充分必要条件是存在一个线性映射 $A: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ 和 n 维向量函数 $R(x, a)=(r^1(x, a), \cdots, r^n(x, a))$, 使得

$$F(x)=F(a)+A(x-a)+\|x-a\| R(x, a), \qquad (1.1.4)$$

且

$$\lim_{x \to a}\|R(x, a)\|=0. \qquad (1.1.5)$$

证明 利用分量函数将(1.1.4)式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} f^1(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^1(a) \\ \vdots \\ f^n(a) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1-a^1 \\ \vdots \\ x^m-a^m \end{pmatrix}$$

$$+\|x-a\|\begin{pmatrix} r^1(x, a) \\ \vdots \\ r^n(x, a) \end{pmatrix},$$

其中矩阵 $(A_{\alpha j})_{n \times m}$ 是 A 的表示. 再根据 m 元函数 $f^\alpha(x)$ $(\alpha=$

$1, \cdots, n$)在 a 点可微分的充分必要条件为

$$f^\alpha(x)=f^\alpha(a)+\sum_{i=1}^{m} C_i^\alpha(x^i-a^i)+\|x-a\|r^\alpha(x, a),$$

其中 $C_1^\alpha, \cdots, C_m^\alpha$ 为常数，且

$$\lim_{x\to a} r^\alpha(x, a)=0.$$

因此，定理得证.

由微积分可知，上式中

$$C_i^\alpha=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(a) \quad (i=1, \cdots, m),$$

于是矩阵 $(A_{\alpha j})$ 的元素

$$A_{\alpha j}=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}(a) \quad (\alpha=1, \cdots, n; \quad j=1, \cdots, m)$$

即 $(A_{\alpha j})$ 为 F 的 Jacobi 矩阵在 a 点计值，记为 $DF(a)$. 这时所对应的线性映射 A: $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ 称为映射 F 在 a 点的**微分**，也用 $DF(a)$ 表示之. 这样，(1.1.4)式可以写成

$$F(x)=F(a)+DF(a)(x-a)+\|x-a\|R(x, a). \qquad (1.1.4')$$

设 U、V 分别为 $\boldsymbol{R}^m$、$\boldsymbol{R}^n$ 中的开子集，且有映射 $F: U \to V$ 和 $G: V \to \boldsymbol{R}^p$，则映射

$$H=G\circ F: U \to \boldsymbol{R}^p, \quad x \mapsto G(F(x))$$

称为映射 F 和 G 的**复合**. 设 F 和 G 的分量函数分别为 $f^1(x), \cdots, f^n(x)$ 和 $g^1(y), \cdots, g^p(y)$，则 H 的分量函数为

$$h^\lambda(x)=g^\lambda\circ F(x)=g^\lambda(f^1(x), \cdots, f^n(x)), \quad \lambda=1, \cdots, p. \qquad (1.1.6)$$

对于复合映射的可微性，有下述定理.

定理 1.1.2(链规则定理) 设映射 F、G 和 H 如上所述，若 F 在点 $a\in U$，G 在点 $F(a)\in V$ 都是可微分的，则 $H=G\circ F$ 在点 a 也是可微分的，且有

$$DH(a)=DG(F(a))\cdot DF(a). \qquad (1.1.7)$$

若 F 在 U 上和 G 在 V 上分别可微分，则 H 在 U 上可微分，且(1.1.7)式对任意的 $a\in U$ 均成立.

证明 设 $y=F(x)$, $x\in U$. 由于映射 F 在点 a, G 在点 $b=F(a)$ 分别是可微分的,因此有

$$H(x)-H(a)=G(y)-G(b)$$
$$=DG(b)(y-b)+\|y-b\|R_G(y, b),$$
$$y-b=F(x)-F(a)=DF(a)(x-a)+\|x-a\|R_F(x, a).$$

于是

$$H(x)-H(a)=DG(b)\cdot DF(a)(x-a)$$
$$+\|x-a\|\Big\{DG(b)R_F(x, a)$$
$$+\frac{\|F(x)-F(a)\|}{\|x-a\|}R_G(y, b)\Big\},$$

且因 $\lim\limits_{x\to a}\|R_F(x, a)\|=0$, $\lim\limits_{y\to b}\|R_G(y, b)\|=0$, $\lim\limits_{x\to a}y=b$, 故

$$\|DG(b)R_F(x, a)\|\leqslant\|DG(b)\|\cdot\|R_F(x, a)\|\xrightarrow[(x\to a)]{}0,$$

这里 $\|DG(b)\|$ 表示矩阵 $DG(b)$ 的范数，它是 $DG(b)$ 中所有元素平方和的平方根. 由于

$$\frac{\|F(x)-F(a)\|}{\|x-a\|}\leqslant\|DF(a)\|+\|R_F(x, a)\|\xrightarrow[(x\to a)]{}\|DF(a)\|,$$

从而由定理 1.1.1 即知，映射 $H:U\to R^p$ 在点 a 是可微分的，且其在 a 的微分 $DH(a)$ 满足(1.1.7). ▌

推论 若 F 和 G 在 U 和 V 上分别都是 C^k 映射，则 $H=G\circ F$ 在 U 上亦是 C^k 映射.

证明 仅对 $k=1$ 进行证明. 当 F 和 G 均为 C^1 映射时，F 和 G 的 Jacobi 矩阵 DF 和 DG 的元素分别是 U 和 V 上的连续函数，因为两个矩阵的乘积矩阵元素为它俩元素的多项式，所以 DH 中的元素是 U 上的连续函数，即 H 的分量函数是 C^1 函数. 因

此，映射 H 在 U 上是 C^1 映射．对于一般的 k，可用归纳法证明①．

下面给出 C^k 函数 $f:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 的一个重要性质．

定理 1.1.3 设 $C\subset\boldsymbol{R}^m$ 是闭集，$K\subset\boldsymbol{R}^m$ 是紧致集，且 $C\cap K=\varnothing$，则存在一个 C^∞ 函数 $\sigma:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$，其值域为 $[0, 1]$，且在 K 上 $\sigma(x)\equiv1$，在 C 上 $\sigma(x)\equiv0$．

证明 分两步进行．

1° 以 $B_\varepsilon(a)$ 表示 $\boldsymbol{R}^m$ 中以 a 为中心，ε 为半径的开球．先证明存在一个 C^∞ 函数 g：$\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$，它在 $\overline{B}_{\varepsilon/2}(a)$ 上恒等于 1，在 $B_\varepsilon(a)$ 上是正的，而在 $B_\varepsilon(a)$ 的外部恒等于零．由直接计算可知

$$h(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant0;\\ e^{-\frac{1}{t}}, & t>0\end{cases}$$

是 C^∞ 函数．再作 $\tilde{g}:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 如下：

$$\tilde{g}(x)=\frac{h(\varepsilon-\|x\|)}{h(\varepsilon-\|x\|)+h\left(\|x\|-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)},$$

因为 $h(t)$ 是 C^∞ 的，且上式中分母恒不为零，因此 $\tilde{g}(x)$ 也是 C^∞ 的，且容易看出，它在 $\overline{B}_{\varepsilon/2}(0)$ 上恒等于 1，在 $B_\varepsilon(0)$ 上是正的，而在 $B_\varepsilon(0)$ 的外部恒等于零．于是 C^∞ 函数

$$g(x)=\tilde{g}(x-a)$$

即为所需求的函数．

2° 因为开集 $\boldsymbol{R}^m-C\supset K$，且 K 是紧致的，故可以选取 $\boldsymbol{R}^m-C$ 内有限个开球 $B_{\varepsilon_i}(a_i)$，$i=1, \cdots, s$，使得

$$\boldsymbol{R}^m-C\supset\bigcup_{i=1}^{s}B_{\varepsilon_i}(a_i)\supset\bigcup_i B_{\varepsilon_i/2}(a_i)\supset K$$

对于每一个 $B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 作出如 1° 中所述的 C^∞ 函数 $g_i(x)$，定义

① 参阅[6]．

$$\sigma(x)=1-\prod_{i=1}^{s}(1-g_i(x)).$$

显然，$\sigma(x)$是 C^∞ 函数，且 $0\leqslant\sigma(x)\leqslant 1$. 对于每一个 $x\in K$，至少有一个 $g_i=1$，故 $\sigma(x)=1$，而在 $\bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 外，所有的 $g_i=0$，故 $\sigma(x)=0$. 特别，在 $C\subset \boldsymbol{R}^m-\bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_i}(a_i)$ 上 $\sigma(x)\equiv 0$. ▮

推论 设 $f(x)$是开集 $U(\subset\boldsymbol{R}^m)$上的 C^k 函数，$a\in U$. 则存在 a 的一个邻域 $W\subset U$ 及 $\boldsymbol{R}^m$ 上的一个 C^k 函数$f^*:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$，使得在 W 上 $f^*(x)=f(x)$，在 U 外 $f^*(x)\equiv 0$.

证明 选取 a 的两个邻域 V_1 和 V_2，使得 $\overline{V}_1\subset V_2\subset\overline{V}_2\subset U$，且使 $\overline{V}_1$ 是紧致的. 令 $K=\overline{V}_1$, $C=\boldsymbol{R}^m-V_2$，则它们满足上述定理的条件，故存在 $\boldsymbol{R}^m$ 上的 C^∞ 函数 $\sigma(x)$，它在 $\overline{V}_1$ 上的值为 1，在 C 上(即 V_2 外)的值为零. 定义函数 $f^*:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 如下:

$$f^*(x)=\begin{cases}\sigma(x)f(x), & x\in U;\\ 0, & x\in\boldsymbol{R}^m-\overline{V}_2,\end{cases}$$

因为 $(\boldsymbol{R}^m-\overline{V}_2)\cap U=U-\overline{V}_2$，而 $\sigma(x)$在 $U-\overline{V}_2$ 上为零，所以 $f^*(x)$是完全确定的. 又因为 $f^*(x)$ 在开集 U 上是 C^k 的，在开集 $\boldsymbol{R}^m-\overline{V}_2$ 上是 C^∞ 的，所以 $f^*(x)$为 $\boldsymbol{R}^m$ 上的 C^k 函数. 显然，V_1 即可取为推论中的 W. ▮

1.2 反函数定理

设 A、B 为两个集合，$f:A\to B$ 为一映射. 如果它是 A 到整个 B 上的映射，即 $f(A)=B$，则称 f 为满射. 如果 f 是一对一的，即对于任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1\neq x_2$ 均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射. 如果 f 既是满射又是单射，则称 f 为双射. 设 $f:A\to B$ 是双射，则存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$. 如果 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为同胚.

定义 1.1.2 设 U 和 V 都是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集. 如果映射 F: $U\to V$ 满足下述条件:

i) F 为同胚;

ii) F 和 F^{-1} 都为 $C^k(k\geqslant1)$ 的,

则称 F 为 C^k-微分同胚; 称 U 和 V 是 C^k-微分同胚的. 特别, 当 $k=\infty$ 时, 简称为微分同胚.

例 1 设 $F:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ 是 $a=(a^1,\cdots,a^m)$ 到 $b=(b^1,\cdots,b^m)$ 的平移. F 可表示为

$$F(x^1,\cdots,x^m)=(x^1+(b^1-a^1),\cdots,x^m+(b^m-a^m)),$$

即 $F(x)=x+(b-a)$. 它的分量函数 $f^i(x)=x^i+(b^i-a^i)(i=1,\cdots,m)$ 都是解析的. 因而 F 是 C^ω 的, F 的逆 $F^{-1}(x)=x+(a-b)$ 同样是 C^ω 的. 又因为 F 是同胚, 所以 F 是微分同胚.

例 2 设 $F:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ 是齐次线性变换

$$F(x)=A\cdot x,\quad x\in\boldsymbol{R}^m,\tag{1.1.8}$$

即

$$F(x^1,\cdots,x^m)=\left(\sum_{j=1}^m a_j^1x^j,\cdots,\sum_{j=1}^m a_j^mx^j\right),$$

由直接计算可知 $DF(x)=A$, A 为矩阵 $(a_j^i)_{m\times m}$.

若 $\det A\neq0$, 则 A 有逆矩阵, 此时逆映射 F^{-1} 也为齐次线性变换, $F^{-1}(x)=A^{-1}\cdot x$. 显然, 此时 F 为同胚, 且 F 和 F^{-1} 都是 C^∞ 的, 从而 F 为微分同胚. 若 $\det A=0$, 则 F 不是单射, 它至少把过原点的一条直线映射为原点. 因此得到结论: 齐次线性变换(1.1.8)为微分同胚的充分必要条件为 $DF(x)=A$ 是非奇异的.

微分同胚是 $\boldsymbol{R}^m$ 中开子集的一个等价关系, 即具有对称性, 反身性和传递性, 前两个性质已包含在定义 1.1.2 中, 而传递性可叙述如下:

引理1 设 U、V、W 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集. $F:U\to V$, $G:V\to W$ 都是满射, $H=G\circ F:U\to W$ 是 F 和 G 的复合，若 F、G、H 中有两个是微分同胚，则第三个也是微分同胚.

证明留给读者作练习.

下面叙述并证明欧氏空间映射的一个基本定理.

定理 1.1.4(反函数定理) 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集, $F:U\to \boldsymbol{R}^m$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 映射. 若 $a\in U$, 且 $DF(a)$ 是非奇异的，则存在 a 的一个开邻域 $W\subset U$, 使得 $F:W\to F(W)=V$ 为 C^k 微分同胚；且若 $x\in W$, $y=F(x)$, 则 F^{-1} 在 y 的微分为

$$DF^{-1}(y)=(DF(x))^{-1}, \tag{1.1.9}$$

其中 $(DF(x))^{-1}$ 表示 $DF(x)$ 的逆.

为证明定理，我们给出下述引理.

引理2 (收缩映射定理) 设 M 是度量为 $d(x, y)$ 的完备度量空间. $T:M\to M$ 是 M 到自身的映射，若存在一个常数 λ, $0\leqslant\lambda<1$, 使得对于任意 x, $y\in M$, 有

$$d(T(x), T(y))\leqslant\lambda d(x, y),$$

则 T 在 M 中有一个唯一不动的点 a.

证明 重复应用映射 T, 得 $d(T^n(x), T^n(y))\leqslant\lambda^n d(x, y)$. 特别，若任取一个点 $x_0\in M$, 并令 $x_n=T^n(x_0)$, 则 $x_{n+m}=T^{n+m}(x_0)=T^n(T^m(x_0))$. 于是有 $d(x_n, x_{n+m})\leqslant\lambda^n d(x_0, T^m(x_0))$. 根据三角不等式，

$$\begin{aligned}d(x_0, T^m(x_0))&\leqslant d(x_0, T(x_0))+d(T(x_0), T^2(x_0))+\cdots\\&\quad+d(T^{m-1}(x_0), T^m(x_0))\\&\leqslant(1+\lambda+\cdots+\lambda^{m-1})d(x_0, T(x_0))\\&\leqslant\frac{1}{1-\lambda}d(x_0, T(x_0)).\end{aligned}$$

故
$$d(x_n, x_{n+m})\leqslant\lambda^n K$$

其中 $$K=\frac{1}{1-\lambda}d(x_0, T(x_0))$$

是一个与 m、n 无关的非负常数. 由于 $0\leqslant\lambda<1$, 因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列. 记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=a.$$

而

$$d(T(a), a)=\lim_{n\to\infty}d(T(x_n), x_n)=\lim_{n\to\infty}d(x_{n+1}, x_n)=0.$$

所以 $T(a)=a$, 即 a 是映射 T 的不动点. 若有两个不同的不动点 a、b, 则 $d(a, b)=d(T(a), T(b))\leqslant\lambda d(a, b)$这与 $\lambda<1$ 的假设矛盾. 因此 T 在 M 中只有唯一的一个不动点 a. ▌

定理 1.1.4 的证明 我们将证明分成若干步.

1° 由引理 1, 结合例 1 和例 2, 不失一般性, 可以假定 $F(0)=0$, $DF(0)=I$, 这里 I 为 $m\times m$ 单位矩阵. 然后, 定义映射 G: $U\to\boldsymbol{R}^m$ 如下:

$$G(x)=x-F(x), \tag{1.1.10$_1$}$$

显然有

$$G(0)=0,\quad DG(0)=0, \tag{1.1.10$_2$}$$

上式中最后一个 0 表示 $m\times m$ 零矩阵.

2° 存在一个实数 $r>0$, 使得 DF 在闭球 $\overline{B}_{2r}(0)\subset U$ 上是非奇异的, 且对于任意的 x_1, $x_2\in\overline{B}_r(0)$, 有

$$\|G(x_1)-G(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\| \tag{1.1.11}$$

和

$$\|x_1-x_2\|\leqslant2\|F(x_1)-F(x_2)\|. \tag{1.1.12}$$

事实上. 因为 F 和 G 都是 $C^k(k\geqslant1)$映射, 故 $DF(x)$, $DG(x)$ 的所有元素都是 x 的连续函数. 因为 $DF(0)=I$, $DG(0)=0$, 因此可适当选取 r, 使得在 $\overline{B}_{2r}(0)\subset U$ 上 $\det(DF(x))$ 恒不等

于零，且在 $\bar{B}_r(0)$ 上 $DG(x)$ 的所有元素的绝对值不大于 $1/2m$. 于是，对于任意的 $x_1, x_2 \in \bar{B}_r(0)$, G 的分量函数 $g^i(x)$ 有

$$|g^i(x_1)-g^i(x_2)| = \left|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g^i}{\partial x^j}(x_2+\theta(x_1-x_2))(x_1^j-x_2^j)\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{m}}{2m}\|x_1-x_2\|, \quad 0<\theta<1.$$

于是

$$\|G(x_1)-G(x_2)\| = \left[\sum_{i=1}^{m}(g^i(x_1)-g^i(x_2))^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,$$

此即(1.1.11). 由 $(1.1.10)_1$, 上式又可写为

$$\frac{1}{2}\|x_1-x_2\| \geqslant \|x_1-F(x_1)-x_2+F(x_2)\|$$

$$\geqslant \|x_1-x_2\|-\|F(x_1)-F(x_2)\|,$$

从而得出(1.1.12)式.

3° 若 $\|x\|\leqslant r$, 则

$$\|G(x)\|\leqslant\frac{r}{2},$$

即
$$G(\bar{B}_r(0))\subset\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0),$$

而且对于每一个 $y\in\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, 存在唯一的 $x\in\bar{B}_r(0)$, 使得 $F(x)=y$.

在(1.1.11)式中令 $x_1=x$, $x_2=0$, 得

$$\|G(x)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x\|.$$

于是 $\|x\|\leqslant r$ 时，

$$\|G(x)\|\leqslant\frac{r}{2}.$$

对于任意的 $y\in\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$ 和 $x\in\bar{B}_r(0)$, 有

$$\|G(x)+y\|\leqslant\|G(x)\|+\|y\|\leqslant\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r.$$

对任一固定的 $y\in\overline{B}_{\frac{r}{2}}(0)$，定义映射 $T_y:\overline{B}_r(0)\to\overline{B}_r(0)$

$$x\mapsto T_y(x)=y+G(x).$$

于是 $T_y(x)=x$ 当且仅当 $y=x-G(x)=F(x)$. 另一方面，对于 $x_1, x_2\in\overline{B}_r(0)$，由(1.1.11)式

$$\|T_y(x_1)-T_y(x_2)\|=\|G(x_1)-G(x_2)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|.$$

这表明 $T_y(x)$是紧致集 $\overline{B}_r(0)$到自身的收缩映射. 利用引理 2，存在唯一的 x，使 $T_y(x)=x$，于是 $y=F(x)$. 从而有映射

$$F^{-1}:\overline{B}_{\frac{r}{2}}(0)\to\overline{B}_r(0),$$

使得 $F\circ F^{-1}(y)=y,\ y\in\overline{B}_{\frac{r}{2}}(0)$.

4° 令 $W=F^{-1}(B_{\frac{r}{2}}(0))$，$V=B_{\frac{r}{2}}(0)$，则 W 是 U 的开子集，且 $F:W\to V$ 为同胚映射.

事实上，由于 F 是连续的，因此 $W=F^{-1}(B_{\frac{r}{2}}(0))$ 是 $\overline{B}_r(0)$ 的开子集. 而 $\overline{B}_r(0)\subset U$，因此 W 是 U 的开子集.

为证明 F 同胚，只须证明 F^{-1} 是连续的. 对于任意的

$$y_1,\ y_2\in B_{\frac{r}{2}}(0),$$

由(1.1.12)式，有

$$\begin{aligned}\|F^{-1}(y_1)-F^{-1}(y_2)\|&=\|x_1-x_2\|\leqslant2\|F(x_1)-F(x_2)\|\\&=2\|y_1-y_2\|,\end{aligned}$$

上式表明 $F^{-1}:V\to W$ 是连续的.

5° 设 $b=F(a)\in V$，则 F^{-1} 在 b 点是可微分的，并且

$$DF^{-1}(b)=(DF(a))^{-1}.$$

因为 F 是 $C^k(k\geqslant1)$的，故对于任意 $x,\ a\in W$，有

$$F(x)-F(a)=DF(a)(x-a)+\|x-a\|R(x,\ a).$$

其中 $\lim\limits_{x\to a}\|R(x,\ a)\|=0$. 由于 $DF(a)$ 是非奇异的，以 B 表示它的

逆，即$B=(DF(a))^{-1}$. 用B左乘上式，得

$$\begin{aligned}B(y-b)&=x-a+\|x-a\|BR(x,a)\\&=F^{-1}(y)-F^{-1}(b)\\&\quad+\|F^{-1}(y)-F^{-1}(b)\|BR(F^{-1}(y),F^{-1}(b)).\end{aligned}$$

将它改写成

$$F^{-1}(y)=F^{-1}(b)+B(y-b)+\|y-b\|r(y,b),$$

其中

$$r(y,b)=\frac{-\|F^{-1}(y)-F^{-1}(b)\|}{\|y-b\|}BR(F^{-1}(y),F^{-1}(b)),\quad y\neq b.$$

由(1.1.12)式

$$\frac{\|F^{-1}(y)-F^{-1}(b)\|}{\|y-b\|}=\frac{\|x-a\|}{\|F(x)-F(a)\|}\leqslant 2.$$

B是常数矩阵，且F^{-1}是连续映射，故$\lim\limits_{y\to b}\|r(y,b)\|=0$. 因此$F^{-1}$在任何点$b\in V$是可微分的，且

$$DF^{-1}(b)=B=(DF(a))^{-1}.$$

6° 若F在W上为$C^k(k\geqslant 1)$的，则F^{-1}在V上也是C^k的.

因为$F^{-1}(y)$在V上是连续的，$F^{-1}(V)=W$，又因DF的元素在W上是C^{k-1}的，而非奇异矩阵的逆矩阵的元素是原矩阵元素的C^∞函数，因此

$$DF^{-1}(y)=(DF(F^{-1}(y)))^{-1},\quad y\in V \tag{1.1.13}$$

的元素在V上是连续的，因此F^{-1}至少是C^1的. 然后，假设F^{-1}是C^l的($l<k$)，由(1.1.13)及以上所述，可知DF^{-1}的元素均为C^l的，因此F^{-1}是C^{l+1}的. 这样由归纳法即知F^{-1}在V上是C^k的. ▌

使用定理1.1.4中的记号，由定理1.1.4，可以得到以下两个推论.

推论1 若DF在U上是非奇异的，则F是U的开映射，即它将U及包含在U内的$\boldsymbol{R}^m$的开子集映为$\boldsymbol{R}^m$中的开子集.

推论2 一个C^k映射$F:U\to F(U)$为C^k微分同胚的充要条件是，它是一对一的，且DF在U的任何点都是非奇异的.

定理1.1.5(隐函数定理) 设U、V分别为$\boldsymbol{R}^m$、$\boldsymbol{R}^n$中的开子集. 映射$f:U\times V\to\boldsymbol{R}^n$是$C^k(k\geqslant 1)$的. 若对于$x_0\in U$, $y_0\in V$映射$y\mapsto f(x_0, y)$在y_0的微分$D_2f(x_0, y_0)$非奇异，则存在x_0的邻域$U_0\subset U$及唯一确定的C^k映射$g:U_0\to\boldsymbol{R}^n$，使得$g(x_0)=y_0$，且对于一切$x\in U_0$，有

$$f(x, g(x))=f(x_0, y).$$

证明 考虑映射$F:U\times V\to\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n$, $(x, y)\mapsto(x, f(x, y))$. 则

$$DF(x_0, y_0)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ D_1f(x_0, y_0) & D_2f(x_0, y_0)\end{pmatrix}$$

其中$D_1f(x_0, y_0)$是映射$x\mapsto f(x, y_0)$在x_0点的微分. 因为$D_2f(x_0, y_0)$非奇异，故$DF(x_0, y_0)$非奇异. 由反函数定理，映射F在(x_0, y_0)的充分小邻域$U_0\times V_0$中存在唯一的逆映射. 设$\pi:\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$, $(x, y)\mapsto y$，令

$$g(x)=\pi\circ F^{-1}(x, f(x_0, y_0)),\quad x_0\in U.$$

容易验证，g即为所求. ∎

1.3 秩定理

定义1.1.3 设U是$\boldsymbol{R}^m$的开子集，$F:U\to\boldsymbol{R}^n$为$C^k(k\geqslant 1)$映射. 映射F的Jacobi矩阵DF在点$x(\in U)$的秩称为映射F在x的秩. 若对每一个$x\in W\subset U$，F的秩均为r，则称F在集合

W 上的秩等于 r.

作映射 F 和一个微分同胚的复合，由于微分同胚有非奇异的 Jacobi 矩阵，根据链规则定理，这个复合映射的秩等于映射 F 的秩.

定理1.1.6(秩定理) 设 A、B 分别为 $\boldsymbol{R}^m$、$\boldsymbol{R}^n$ 中的开子集，$F:A\to B$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$映射，且 F 在 A 上的秩等于 r. 设 $a\in A$，$b=F(a)\in B$，则存在 a、b 的开邻域 $A_0\subset A$，$B_0\subset B$ 和 C^k 微分同胚 $u:A_0\to U(\subset\boldsymbol{R}^m)$，$v:B_0\to V(\subset\boldsymbol{R}^n)$，使得映射 $v\circ F\circ u^{-1}:U\to V$ 具有下述简单的形式:

$$v\circ F\circ u^{-1}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^r,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-r\text{个}}).\qquad(1.1.14)$$

证明 1° 不失一般性，可以假设 a、b 分别为 $\boldsymbol{R}^m$、$\boldsymbol{R}^n$ 中的原点，且 $DF(a)$ 中左上方的 r 级子式不为零，即

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^r}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f^r}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^r}{\partial x^r}\end{pmatrix}(a)\neq 0.$$

2° 存在原点 a 的一个邻域 $A_1\subset A$ 及 C^k 微分同胚 $u:A_1\to u(A_1)=U_1$，使得

$$\begin{aligned}&F\circ u^{-1}(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},\cdots,x^m)\\&\quad=(x^1,\cdots,x^r,\bar f^{r+1}(x^1,\cdots,x^r),\cdots,\bar f^n(x^1,\cdots,x^r)).\end{aligned}$$

为此，定义 C^k 映射 $u:A\to\boldsymbol{R}^m$, $x\mapsto u(x)$如下:

$$\begin{aligned}&u(x^1,\cdots,x^m)\\&\quad=(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^r(x^1,\cdots,x^m),x^{r+1},\cdots,x^m).\end{aligned}$$

显然 $u(0)=0$, 且

$$Du(x)=\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^r} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \frac{\partial f^r}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^r}{\partial x^r} & \\ \hline & 0 & & I_{m-r}\end{array}\right)$$

其中 I_{m-r} 为 $(m-r)\times(m-r)$ 单位矩阵，左下方为 $(m-r)\times r$ 零矩阵，$*$ 表示 $r\times(m-r)$ 矩阵. 由 1° 可知矩阵 $Du(a)$ 是非奇异的，由反函数定理，在 A 中存在 a 点的邻域 A_1，使 $u:A_1\to u(A_1)=U_1$ 为 C^k 微分同胚. 由 $u(0)=0$, $F(0)=0$ 可知 $F\circ u^{-1}(0)=0$, $F\circ u^{-1}(U_1)\subset B$.

并且

$$\begin{aligned}&F\circ u^{-1}(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},\cdots,x^m)\\&=(x^1,\cdots,x^r,\bar{f}^{r+1}(x),\cdots,\bar{f}^n(x)),\end{aligned}$$

其中

$$\bar{f}^{r+j}=f^{r+j}\circ u^{-1}(x),\quad j=1,\cdots,n-r.$$

显然

$$D(F\circ u^{-1})(x)=\left(\begin{array}{c|ccc}I_r & & 0 & \\ \hline & \frac{\partial \bar{f}^{r+1}}{\partial x^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial \bar{f}^{r+1}}{\partial x^m}\\ * & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{\partial \bar{f}^n}{\partial x^{r+1}} & \cdots & \frac{\partial \bar{f}^n}{\partial x^m}\end{array}\right),\quad x\in U_1.$$

由于 $u^1:U_1\to A_1$ 为微分同胚，因此 $F\circ u^{-1}$ 在 U_1 上的秩等于 F 的秩 r，这意味着 $D(F\circ u^{-1})(x)$ 右下方的全部元素在 U_1 上均为零，即 $\bar{f}^{r+1},\cdots,\bar{f}^n$ 均仅为 $x^1,\cdots,x^r$ 的函数.

3°. 定义 $\boldsymbol{R}^n$ 中 C^k 映射 $\bar{v}:V_1\to B$, $y\mapsto\bar{v}(y)$ 如下：

$$\begin{aligned}&\bar{v}(y^1,\cdots,y^n)\\&=(y^1,\cdots,y^r,y^{r+1}+\bar{f}^{r+1}(y^1,\cdots,y^r),\cdots,y^n+\bar{f}^n(y^1\cdots y^r)),\end{aligned}$$

显然 $\bar{v}(0)=0$. 这里 V_1 是 0 点的充分小邻域，使当

$$y=(y^1, \cdots, y^n)\in V_1$$

时，$\bar{f}^{r+j}(y^1, \cdots, y^r)(j=1, \cdots, n-r)$ 都有定义，且使 $\bar{v}(V_1)\subset \boldsymbol{B}$. 经计算可知

$$D\bar{v}(y)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} \end{array}\right).$$

因此 $D\bar{v}$ 在 V_1 上是非奇异的. 由反函数定理，存在原点的邻域 $V\subset V_1$, 使 $\bar{v}:V\to\bar{v}(V)=B_0\subset B$ 为 C^k 微分同胚.

4° 选取 $\boldsymbol{R}^m$ 中原点的邻域 $U\subset U_1$, 使得 $F\circ u^{-1}(U)\subset B_0$. 记 $A_0=u^{-1}(U)$, $v=(\bar{v})^{-1}$. 于是有映射 $v\circ F\circ u^{-1}:U\to V$, 且它为 C^k 的. 再利用 2°, 3°, 可得

$$\begin{aligned} &v\circ F\circ u^{-1}(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, \cdots, x^m)\\ &=(\bar{v})^{-1}(x^1, \cdots, x^r, \bar{f}^{r+1}(x^1, \cdots, x^r), \cdots, \bar{f}^n(x^1, \cdots, x^r))\\ &=(x^1, \cdots, x^r, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-r)\text{个}}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

推论 可用以下方式选取 U 和 V. (i) $U=B_\varepsilon^m(0)$ $V=B_\varepsilon^n(0)$ 或 (ii) $U=C_\varepsilon^m(0)$, $V=C_\varepsilon^n(0)$, 此处

$$C_a^s(0)=\{x\in\boldsymbol{R}^s \mid |x^j|<a;\ j=1, \cdots, s\}.$$

以 π 表示 $\boldsymbol{R}^k\times\boldsymbol{R}^{n-k}$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 的投影，i 表示 $\boldsymbol{R}^k$ 到 $\boldsymbol{R}^k\times\boldsymbol{R}^{m-k}$ 的子集 $\boldsymbol{R}^k\times\{0\}$ 的单射，则在情况 (i), (ii) 中，$\pi\circ v\circ F\circ u^{-1}\circ i$ 分别是 $B_\varepsilon^k(0)$, $C_\varepsilon^k(0)$ 上的恒同映射.

1.4 Sard 定理

定义 1.1.4 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开子集. $F:U\to\boldsymbol{R}^n$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 映射. 对于 $a\in U$, 若 $DF(a)$ 的秩小于 n, 则称点 a 是映射 F 的临界点，对应的 $F(a)\in\boldsymbol{R}^n$ 称为临界值.

定理 1.1.7(Sard 定理) 设 $F:U\to\boldsymbol{R}^n$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 映射，U

是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开子集．记

$$A=\{a\in U\,|\,a\text{ 是 }F\text{ 的临界点}\}$$

则 $F(A)$在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的测度等于零．

（证明见附录 II．）

§2 多重线性代数

2.1 向量空间 对偶空间

设 $\boldsymbol{F}$ 是一个域，通常它为实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$．$\boldsymbol{F}$ 上的一个向量空间 V 是一个集合，它具有以下两种运算：

（i）加法：$V\times V\to V$，$(X, Y)\mapsto X+Y$，且 V 关于加法构成一个交换群，其单位元记成 0．

（ii）乘数：$\boldsymbol{F}\times V\to V$，$(\alpha, X)\mapsto \alpha X$，且对于任意的 $\alpha, \beta\in \boldsymbol{F}$，$X, Y\in V$ 都有

$$\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y,\quad (\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X,$$
$$(\alpha\beta)X=\alpha(\beta X),$$
$$1X=X,\quad 0X=0,$$

最后一个等式左侧 0 是数零，右侧 0 是 V 作为交换群的单位元．向量空间 V 的元素称为向量．

一个向量空间 V 如果还具有一个乘法运算 $\odot: V\times V\to V$，$(X, Y)\mapsto X\odot Y$，则它就成为一个代数．

向量空间 V 的一组基（底）是 V 的一个线性无关的向量组 $e_1, \cdots, e_n$，且 V 的任一个元素 X 均可由它们线性表出，即有

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i e_i, \tag{1.2.1}$$

数组 $X^1, \cdots, X^n$ 称为向量 X 关于基$\{e_i\}$的分量．V 的一组基中所含向量的个数称为向量空间 V 的维数．这个定义是合理的，

因为 V 的每一组基都具有相同数目个元素. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基，令

$$\bar{e}_j=\sum_{i=1}^{n} a_j^i e_i, \quad a_j^i \in \boldsymbol{F}, \quad i, j=1, \cdots, n. \tag{1.2.2}$$

易见 $\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n$ 为 V 的一组基的充要条件是矩阵 $A=(a_j^i)_{n\times n}$ 是非奇异的，也即

$$\det(a_j^i)\neq 0. \tag{1.2.3}$$

现设 $\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}(i=1, \cdots, n)$ 为 V 的两组基，则对任一个向量 X 有

$$X=\sum_{i=1}^{n} X^i e_i=\sum_{i=1}^{n} \overline{X}^i \bar{e}_i,$$

且根据(1.2.2)和(1.2.3),

$$X^i=\sum_{j=1}^{n} a_j^i \overline{X}^j, \quad \overline{X}^i=\sum_{j=1}^{n} b_j^i X_i, \quad (i=1, \cdots, n)$$

其中矩阵 $B=(b_j^i)$ 为矩阵 $A=(a_j^i)$ 的逆矩阵，即

$$\sum_{k=1}^{n} b_j^k a_k^i=\delta_j^i, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k^j a_i^k=\delta_i^j,$$

式中

$$\delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j, \\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.2.4}$$

称为 Kronecker delta.

为了方便，今后在一个项里，上、下指标有相同字母时，则表示在该指标的变化范围内求和(除非另有说明). 这个字母称为求和指标或哑指标. 因此以上诸式可简单地表成

$$X=X^i e_i=\overline{X}^i \bar{e}_i, \quad X^i=a_j^i \overline{X}^j, \quad \overline{X}^i=b_j^i X^j,$$

$$a_i^k b_k^j=\delta_i^j, \ a_k^i b_j^k=\delta_j^i.$$

设 V 为 n 维向量空间，$\theta: V\to \boldsymbol{F}$ 为线性映射，即对于任何 $X, Y\in V$ 和 $\alpha\in \boldsymbol{F}$, 有

$$\begin{cases}\theta(X+Y)=\theta(X)+\theta(Y), \\ \theta(\alpha X)=\alpha\theta(X).\end{cases} \tag{1.2.5}$$

记 $V^*=\{\theta|\theta:V\to \boldsymbol{F}$ 为线性映射$\}$. 在 V^* 中用以下自然方式来定义加法和数乘运算 $\theta+\omega$ 和 $\alpha\theta$: 对于任何 $X\in V$, 定义

$$\begin{cases}(\theta+\omega)(X)=\theta(X)+\omega(X), \ \theta,\ \omega\in V^*,\ \alpha\in \boldsymbol{F},\\ (\alpha\theta)(X)=\alpha\theta(X),\end{cases} \tag{1.2.6}$$

则 V^* 成为 $\boldsymbol{F}$ 上的向量空间. 考虑向量空间 V^* 上的 n 个向量 $\omega^1, \cdots, \omega^n$, 使得

$$\langle\omega^j,\ e_i\rangle \xlongequal{\text{def}} \omega^j(e_i)=\delta^j_i, \tag{1.2.7}$$

易见 $\omega^1, \cdots, \omega^n$ 是线性无关的, 且对任一个 $\theta\in V^*$ 有

$$\theta=\sum_{i=1}^n \theta(e_i)\omega^i,$$

故 $\{\omega^i\}_{1\le i\le n}$ 是 V^* 的一组基, 从而 V^* 和 V 有相同的维数. V^* 称为 V 的对偶空间. $\{\omega^i\}$ 称为 $\{e_i\}$ 的对偶基.

以 V^{**} 表示 V^* 的对偶空间, 我们有

定理 1.2.1 V 是 V^* 的对偶空间, 即 $V=V^{**}$.

证明 对于任意的 $X\in V$, $\omega\in V^*$, 定义

$$\langle X,\ \omega\rangle=\omega(X).$$

于是, 对于任何 $\omega,\ \theta\in V^*$, $\alpha\in \boldsymbol{F}$, 有

$$\begin{aligned}\langle X,\ \omega+\theta\rangle&=(\omega+\theta)(X)=\omega(X)+\theta(X)\\&=\langle X,\ \omega\rangle+\langle X,\ \theta\rangle;\end{aligned}$$

$$\langle X,\ \alpha\omega\rangle=(\alpha\omega)(X)=\alpha\omega(X)=\alpha\langle X,\ \omega\rangle,$$

这意味着 X 是 V^* 到 $\boldsymbol{F}$ 的线性映射.

另一方面, 对于任何一个 $V^*\to \boldsymbol{F}$ 的线性映射 φ, 总可以找到一个 $X\in V$, 使得对于任何 $\omega\in V^*$, 有 $\langle X,\ \omega\rangle=\varphi(\omega)$. 事实上, 令 $X=\sum\limits_{i=1}^n \varphi(\omega^i)e_i$, 则

$$\begin{aligned}\langle X,\ \omega\rangle&=\omega\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\omega^i)e_i\right)=\sum_{i=1}^n \varphi(\omega^i)\omega(e_i)\\&=\varphi\left(\sum_{i=1}^n \omega(e_i)\omega^i\right)=\varphi(\omega).\end{aligned}$$

综上所述，V 是 $V^* \to \boldsymbol{F}$ 的线性映射全体，即 $V = V^{**}$. ∎

以上所证，实质上说明了 V 与 V^{**} 是自然同构的.

设$\{e_i\}$和$\{\bar{e}_i\}$为 V 的两组基，$\{\omega^i\}$和$\{\bar{\omega}^i\}$分别为它们的对偶基. 设

$$\bar{e}_j = a_j^i e_i,$$

则有

$$\bar{\omega}^j = b_i^j \omega^i,$$

其中矩阵 $B = (b_i^j)$是矩阵 $A = (a_i^j)$的逆，即 $B = A^{-1}$.

又若 $X = X^i e_i = \bar{X}^i \bar{e}_i$, $\theta = \theta_i \omega^i = \bar{\theta}_i \bar{\omega}^i$, 则

$$\bar{X}^i = b_j^i X^j, \quad \bar{\theta}_i = a_i^j \theta_j.$$

通常，V 中的元素 X 称为**反变向量**，它的分量 X^1, …, X^n 称为**反变分量**. V^* 中的元素 θ 称为**共变向量**，它的分量 θ_1 …, θ_n 称为**共变分量**.

2.2 张量积 张量代数

定义 1.2.1 设 $V_1, \cdots, V_k$ 和 W 均为向量空间，$f: V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \to W$. 若对于任意的 $X_i, Y_i \in V_i (i = 1, \cdots, k)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$, 有

$$f(X_1, \cdots, X_{i-1}, \alpha X_i + \beta Y_i, X_{i+1}, \cdots, X_k)$$
$$= \alpha f(X_1, \cdots, X_k) + \beta f(X_1, \cdots, X_{i-1}, Y_i, X_{i+1}, \cdots, X_k), \tag{1.2.8}$$

则映射 f 称为 k（重）线性的. 特别，$k = 2$ 时，f 称为**双线性映射**.

令

$\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_k; W) = \{f \mid f: V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \to W$ 为 k 重线性映射$\}$，仿 2.1 所作，用一种自然的方式定义加法和数乘，$\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_k; W)$可成为一个向量空间.

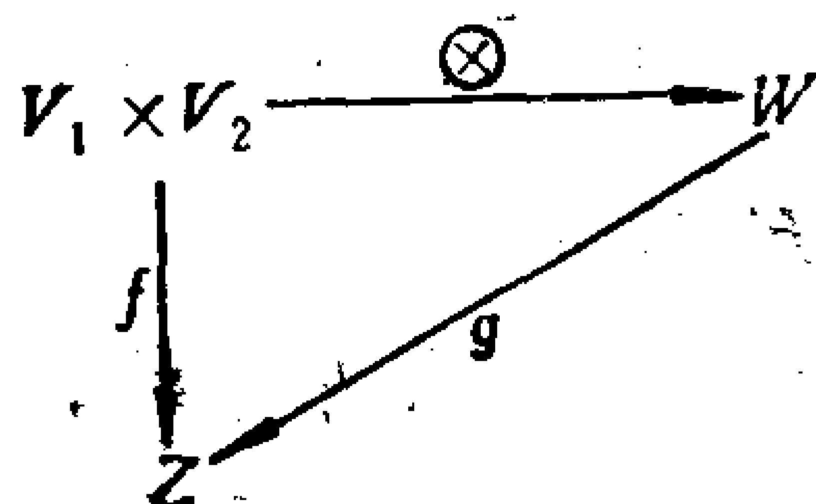
注意，线性映射 $T: V \to W$ 的值域 $\operatorname{Im} T = T(V)$是 W 的一个子空间，但 k 重线性映射 f 的值域 $\operatorname{Im} f = \{f(X_1, \cdots, X_k) \mid X_i \in$

V_i, $i=1, \cdots, k\}$ 不一定是 W 的子空间，以下用 $\langle \mathrm{Im}\, f \rangle$ 表示由 $\mathrm{Im}\, f$ 生成的 W 的子空间.

定义 1.2.2 设 V_1、V_2 为给定的两个向量空间，如果存在一个向量空间 W 和一个双线性映射 $\otimes: V_1 \times V_2 \to W$, 使得

(i) $W = \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle = \langle \otimes (V_1 \times V_2) \rangle$,

(ii) 对于任意的向量空间 Z 和双线性映射 $f: V_1 \times V_2 \to Z$, 都存在线性映射 $g: W \to Z$, 使得 $f = g \circ \otimes$, 即有下述可交换图:



那末, W 称为由 V_1 和 V_2 的张量积生成的**张量空间**，或称 W 为 V_1 和 V_2 的**张量积**, 记作 $W = V_1 \otimes V_2$.

容易看出，定义条件(ii)中线性映射 g 是由 f 唯一确定的. 事实上，若有 $g_i: W \to Z$ 满足 $f = g_i \circ \otimes$, $i=1, 2$, 则对于任何 $X_1 \in V_1$, $X_2 \in V_2$, $f(X_1, X_2) = g_i(X_1 \otimes X_2)$, $i=1, 2$. 因此

$$g_1(X_1 \otimes X_2) = g_2(X_1 \otimes X_2).$$

由条件(i)及 X_1, X_2 的任意性，可见 $g_1 = g_2$.

以下来寻求 W 和 $\otimes$. 设 V_1^* 和 V_2^* 分别为 V_1 和 V_2 的对偶空间. 先作映射 $\otimes$:

$$(X, Y) \mapsto X \otimes Y, \quad X \in V_1, \quad Y \in V_2,$$

这里 $X \otimes Y: V_1^* \times V_2^* \to \boldsymbol{F}$ 定义如下：对任意的 $\theta \in V_1^*$, $\sigma \in V_2^*$,

$$(X \otimes Y)(\theta, \sigma) = \langle \theta, X \rangle \langle \sigma, Y \rangle,$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 类似于(1.2.7)所定义. 由此易见 $X \otimes Y \in \mathscr{L}(V_1^*, V_2^*; \boldsymbol{F})$, 且映射 $\otimes: V_1 \times V_2 \to \mathscr{L}(V_1^*, V_2^*; \boldsymbol{F})$ 是双线性的. 以 W 表示由 $X \otimes Y$ ($X \in V_1$, $Y \in V_2$) 所生成的向量子空间，即

$$W = \langle \otimes (V_1 \times V_2) \rangle \subset \mathscr{L}(V_1^*, V_2^*; \boldsymbol{F}).$$

现来证实 W 和 $\otimes$ 即为所求. 设$\{e_i\}$, $1\leqslant i\leqslant n=\dim V_1$, $\{\bar{e}_p\}$, $1\leqslant p\leqslant m=\dim V_2$ 分别是 V_1 和 V_2 的一组基. $\{\omega^i\}$和$\{\bar{\omega}^p\}$分别为 V_1^* 和 V_2^* 中关于$\{e_i\}$和$\{\bar{e}_p\}$的对偶基. 因为$\otimes$是双线性映射, 故

$$X\otimes Y=X(\omega^i)Y(\bar{\omega}^p)e_i\otimes\bar{e}_p.$$

于是, W 中元素是$\{e_i\otimes\bar{e}_p\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant p\leqslant m$ 的线性组合, 易知$\{e_i\otimes\bar{e}_p\}$是线性无关组, 故 W 为 $n\times m$ 维向量空间, $\{e_i\otimes\bar{e}_p\}$ 为其一组基. 另一方面, 任意一个 $l\in\mathscr{L}(V_1^*, V_2^*; \boldsymbol{F})$均可表达为

$$l=\sum_{i,p}a^{ip}e\otimes\bar{e}_p,$$

其中 $a^{ip}=l(\omega^i, \bar{\omega}^p)\in\boldsymbol{F}$, 故证得

$$W=\mathscr{L}(V_1^*, V_2^*; \boldsymbol{F}),$$

$$\dim W=n\times m=(\dim V_1)\times(\dim V_2).$$

现在, 若 $f: V_1\times V_2\to Z$ 为双线性映射, 用下述方式来定义一个线性映射 $g: W\to Z$: 对于任意的 $X\in V_1$, $Y\in V_2$, 令

$$g(X\otimes Y)=f(X, Y)$$

从而即得 $f=g\circ\otimes$. 由上所作, 我们即有

定理1.2.2 向量空间 V_1 和 V_2 的张量积 (空间)是存在的, 并且在同构的意义是唯一的. 其维数等于 V_1 和 V_2 的维数的乘积.

相仿, 可确定 V_1^* 和 V_2^* 的张量积 $V_1^*\otimes V_2^*$, 且有

$$V_1^*\otimes V_2^*\cong\mathscr{L}(V_1, V_2; \boldsymbol{F}).$$

此外, $\{\omega^i\otimes\bar{\omega}^p\}$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant p\leqslant m$ 为其一组基.

若用下述方式来定义一个双线性映射

$$\langle\ ,\ \rangle: (V_1\otimes V_2)\times(V_1^*\otimes V_2^*)\to\boldsymbol{F}$$

先令

$$\langle e_i\otimes\bar{e}_p, \omega^j\otimes\bar{\omega}^q\rangle=\langle e_i, \omega^j\rangle\langle\bar{e}_p, \bar{\omega}^q\rangle=\delta_i^j\delta_p^q, \tag{1.2.9}$$

再作线性扩张, 则得到

命题 1.2.3 张量积 $V_1 \otimes V_2$ 和 $V_1^* \otimes V_2^*$ 是相互对偶的，且 $\{e_i \otimes \bar{e}_p\}$ 和 $\{\omega^i \otimes \bar{\omega}^p\}$ 互为对偶基.

类似地，可定义张量积

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k = \bigotimes_{i=1}^{k} V_i,$$

即有 k 线性映射

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_k \to \bigotimes_{i=1}^{k} V_i,$$

使得

$$\bigotimes_{i=1}^{k} V_i = \langle \otimes (V_1 \times \cdots \times V_k) \rangle,$$

且对任一 k 线性映射 $f \in \mathscr{L}(V_1, \cdots, V_k; Z)$，必存在唯一的线性映射

$$g \in \mathscr{L}\left(\bigotimes_{i=1}^{k} V_i; Z\right)$$

使得 $f = g \circ \otimes$. 此时

$$\dim\left(\bigotimes_{i=1}^{k} V_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \dim V_i.$$

定义 1.2.3 设 V 为 n 维向量空间. V^* 为其对偶空间. 张量空间

$$V_s^r = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{r} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{s}$$

的元素称为 r 阶反变，s 阶共变的 (r, s) 型张量

1 阶反变(共变)张量即为反变(共变)向量，将 $\boldsymbol{F}$ 的元素认作 (0, 0) 型张量，则

$$V_0^0 = \boldsymbol{F}, \quad V_0^1 = V, \quad V_1^0 = V^*.$$

设 $\{e_i\}$ 为 V 的一组基，$\{\omega^i\}$ 为其对偶基，于是

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}\}, \ i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s = 1, \cdots, n$$

是 V_s^r 的一组基. $\Phi \in V_s^r$ 可唯一表示成

$$\Phi = \Phi_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s},$$

其中

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\Phi(\omega^{i_1},\ \cdots,\ \omega^{i_r},\ e_{j_1},\ \cdots e_{j_s})$$
$$=\langle\Phi,\ \omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_s}\rangle \quad (1.2.10)$$

称为张量 Φ 关于基$\{e_i\}$的**分量**.

设$\{\bar{e}_i\}$为 V 的另一组基，$\bar{e}_i=a_i^j e_j$. 设矩阵(b_i^j)为矩阵(a_i^j)的逆矩阵，以 $\bar{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$ 表示 Φ 关于基$\{\bar{e}_i\}$的分量，则易证

$$\bar{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\Phi^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}b^{i_1}_{k_1}\cdots b^{i_r}_{k_r}a^{l_1}_{j_1}\cdots a^{l_s}_{j_s}. \quad (1.2.10)$$

上式即为基变换下，张量的对应分量之间的变换式.

反之，若在不同基下有两组量$\{\bar{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\}$和$\{\Phi^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\}$，它们满足关系式(1.2.10)′，则可以定义一个$(r,\ s)$型张量 Φ:

$$\Phi=\Phi^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_r}\otimes\omega^{l_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{l_s}$$
$$=\bar{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j}\ \bar{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}_{i_r}\otimes\bar{\omega}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\bar{\omega}^{j_s}.$$

因此有

命题 1.2.4 在不同基$\{e_i\}$和$\{\bar{e}_i=a_i^j e_j\}$下，两组量$\{\Phi^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\}$和$\{\bar{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\}$为一个$(r,\ s)$型张量 $\bar{\Phi}$ 的对应分量的充要条件是它们满足关系式(1.2.10)′.

上述命题也可作为张量的定义. 在张量计算中，这是判断一个量为张量的准则.

$(r,\ s)$型张量是向量空间 V^r_s 的元素，故同类型的张量可以相加，当然它们也可以进行数乘. 此外张量还有另外两种运算：张量乘法和缩并.

定义 1.2.4 设 $\Phi\in V^{r_1}_{s_1}$, $\Psi\in V^{r_2}_{s_2}$, 张量 Φ 和 Ψ 的张量积

$$\Phi\otimes\Psi\in V^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}$$

定义如下：对任意的

$$(\theta^1,\ \cdots,\ \theta^{r_1+r_2})\in\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{r_1+r_2}$$

和

$$(X_1,\ \cdots,\ X_{s_1+s_2})\in\overbrace{V\times\cdots\times V}^{s_1+s_2},$$

有

$$(\Phi\otimes\Psi)(\theta^1,\ \cdots,\ \theta^{r_1+r_2},\ X_1,\ \cdots,\ X_{s_1+s_2})$$
$$=\Phi(\theta^1,\cdots,\theta^{r_1},X_1,\cdots,X_{s_1})\Psi(\theta^{r_1+1},\cdots\theta^{r_1+r_2},X_{s_1+1},\ \cdots,X_{s_1+s_2}). \tag{1.2.11}$$

显见这样定义的张量乘法满足结合律和分配律．此外 $\Phi\otimes\Psi$ 关于一组基$\{e_i\}$的分量是 Φ 和 Ψ 的分量的乘积，即有

$$(\Phi\otimes\Psi)^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_1\cdots j_{s_1+s_2}}=\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Psi^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}_{j_{s_1+1}\cdots j_{s_1+s_2}}. \tag{1.2.11$'$}$$

现在引入张量的一种重要而特殊的运算——缩并．

设 $T=X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\theta^s$，其中 $X_i\in V$，$1\leqslant i\leqslant r$；$\theta^j\in V^*$，$1\leqslant j\leqslant s$．对于固定的二个指标$(i,\ j)$，定义

$$\mathrm{ct}_{(i,j)}T$$
$$=\langle X_i,\ \theta^j\rangle X_1\otimes\cdots\otimes\hat{X}_i\otimes\cdots\otimes X_r\otimes\theta^1\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^j\otimes\cdots\otimes\theta^s,$$

其中记号“∧”表示删去该因子．对于一般的(r,s)型张量 $\Phi\in V^r_s$，我们把算子 $\mathrm{ct}_{(i,j)}$线性扩张后作用到 Φ 上，就得到一个$(r-1,\ s-1)$型张量 $\mathrm{ct}_{(i,j)}\Phi\in V^{r-1}_{s-1}$．具体表示如下：

设

$$\Phi=\Phi^{h_1\cdots h_r}_{k_1\cdots k_s}e_{h_1}\otimes\cdots\otimes e_{h_r}\otimes\theta^{k_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{k_s},$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{ct}_{(i,j)}\Phi&=\Phi^{h_1\cdots h_r}_{k_1\cdots k_s}\mathrm{ct}_{(i,j)}(e_{h_1}\otimes\cdots\otimes e_{h_r}\otimes\theta^{k_1}\otimes\cdots\otimes\theta^{k_s})\\&=\Phi^{h_1\cdots h_r}_{k_1\cdots k_s}\langle e_{h_i},\ \theta^{k_j}\rangle e_{h_1}\otimes\cdots\otimes\hat{e}_{h_i}\otimes\cdots\otimes e_{h_r}\\&\quad\otimes\theta^{k_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^{k_j}\otimes\cdots\otimes\theta^{k_s}\\&=\Phi^{h_1\cdots h_{i-1}lh_{r+1}\cdots h_r}_{k_1\cdots k_{j-1}lk_{j+1}\cdots k_s}e_{h_1}\otimes\cdots\otimes\hat{e}_{h_i}\otimes\cdots\otimes e_{h_r}\\&\quad\otimes\theta^{k_1}\otimes\cdots\otimes\hat{\theta}^{k_j}\otimes\cdots\otimes\theta^{k_s}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

定义 1.2.5 上述运算 $\mathrm{ct}:V^r_s\to V^{r-1}_{s-1}$ 称为张量的缩并．

根据向量空间的加法，我们可构作 F 上所有向量空间 V^r_s 的直和

$$\mathscr{T}(V)=\sum_{r,s}^{0,\cdots,\infty}\oplus V^r_s.$$

其元素为$\sum\oplus X^r_s$, $X^r_s\in V^r_s$, 和式中只含有限多项. $\mathscr{T}(V)$为无限维向量空间. 利用张量乘法$\otimes$, $\mathscr{T}(V)$成为$\boldsymbol{F}$上一个结合代数, 它称为V上的张量代数. 令

$$V^r=V^r_0,\quad V_r=V^0_r,\quad V_0=V^0=\boldsymbol{F},$$

易见

$$\mathscr{T}^{\mathrm{I}}(V)=\sum_r^{0,\cdots,\infty}\oplus V^r,\quad \mathscr{T}^{\mathrm{II}}(V)=\sum_r^{0,\cdots,\infty}\oplus V_r$$

是$\mathscr{T}(V)$的两个子代数.

2.3 对称和反(对)称张量

我们来研究

$$V_r=\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{r}$$

中两类特殊的张量.

定义 1.2.6 设$\Phi\in V_r$, 若对于任意的$X_1,\cdots,X_r\in V$都有

$$\begin{aligned}&\Phi(X_1,\cdots,X_a,\cdots,X_b,\cdots,X_r)\\&=\Phi(X_1,\cdots,X_{a-1},X_b,X_{a+1},\cdots,\\&\quad X_{b-1},X_a,X_{b+1},\cdots,X_r),\quad(1\leqslant a,b\leqslant r)\end{aligned}\tag{1.2.13}$$

则称r阶共变张量Φ是对称的; 而若

$$\begin{aligned}&\Phi(X_1,\cdots,X_a,\cdots,X_b,\cdots,X_r)\\&=-\Phi(X_1,\cdots,X_{a-1},X_b,X_{a+1},\cdots,\\&\quad X_{b-1},X_a,X_{b+1},\cdots,X_r),\quad(1\leqslant a,b\leqslant r),\end{aligned}\tag{1.2.14}$$

则称Φ是反(对)称的.

设$\{e_i\}$为V的一组基, $\{\omega^i\}$为V^*中的对偶基, 使用分量来表示

$$\Phi=\Phi_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r},\quad 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n$$

令
$$X_a=\lambda_a^{i_a}e_{i_a},\qquad(1\leqslant a\leqslant r),$$

则直接算得

$$
\begin{aligned}
&\Phi(X_1, \cdots, X_a, \cdots, X_b, \cdots, X_r) \\
&\qquad \mp\Phi(X_1, \cdots, X_{a-1}, X_b, X_{a+1}, \cdots, X_{b-1}, X_a, X_{b+1}, \cdots, X_r) \\
&\quad =(\Phi_{i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_r} \mp \Phi_{i_1\cdots i_{a-1}i_bi_{a+1}\cdots i_{b-1}i_ai_{b+1}\cdots i_r})\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\cdots\lambda_r^{i_r}, \ (1\leqslant a, \ b\leqslant r).
\end{aligned}
$$

由于 $X_1, \cdots, X_r\in V$ 的任意性，即 $\lambda_a^{i_a}$ 的任意性，就得到下列命题.

命题 1.2.5 设 $\Phi\in V_r$，则 Φ 为对称张量(反称张量)的充要条件是它的分量关于各指标是对称的(反称的).

如果 Φ, $\Psi\in V_r$ 同是对称的或反称的. 则对于任意的 α, $\beta\in \boldsymbol{F}$, $\alpha\Phi+\beta\Psi$ 同样是对称的或反称的. 因此，V_r 内对称张量的全体构成 V_r 的一个子空间，用 $\odot^r(V^*)$ 表示，反称张量的全体也构成一个子空间，用 $\wedge^r(V^*)$ 表示. 显然这两个子空间只有零张量是公共元.

为进一步开展讨论，我们给出另一种叙述. 以 $\varphi(r)$ 表示自然数$\{1, \cdots, r\}$的置换群，$\sigma\in\varphi(r)$ 表示置换 $(1, \cdots, r)\to(\sigma(1), \cdots, \sigma(r))$，再以 sgn 表示置换 σ 的符号，即

$$
\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}+1, & \sigma \text{ 为偶置换}, \\ -1, & \sigma \text{ 为奇置换}.\end{cases} \tag{1.2.15}
$$

易见 $\sigma\mapsto\operatorname{sgn}\sigma$ 是置换群 $\varphi(r)$ 到由两个元素 $+1$, -1 构成的乘法群的同态. 于是，我们就可得出等价定义:

如果对于任意的 $X_1, \cdots, X_r\in V$ 和 $\sigma\in\varphi(r)$，都有

$$
\Phi(X_1, \cdots, X_r)=\Phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}),
$$

则 Φ 是对称的；如果

$$
\Phi(X_1, \cdots, X_r)=(\operatorname{sgn}\sigma)\Phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}),
$$

则 Φ 是反称的.

$\varphi(r)$ 的任一个元素 σ 确定了 V_r 的一个自同态 $\sigma: V_r\to V_r$，其定义为对于任意的 $\Phi\in V_r$ 及 $X_1, \cdots, X_r\in V$

$$\sigma\Phi(X_1, \cdots, X_r)=\Phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}). \qquad (1.2.16)$$

从而 $\Phi\in V_r$ 为对称张量的充要条件是，对任意的 $\sigma\in\varphi(r)$，有

$$\sigma\Phi=\Phi; \qquad (1.2.17)$$

Φ 为反称张量的充要条件是，对于任意的 $\sigma\in\varphi(r)$，有

$$\sigma\Phi=(\mathrm{sgn}\,\sigma)\Phi \qquad (1.2.18)$$

使用以上符号，在张量空间 V_r 上给出两个重要的线性变换 $\mathscr{S}_r$ 和 $\mathscr{A}_r: V_r\to V_r$，其定义分别为：

$$\mathscr{S}_r(\Phi)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}\sigma\Phi, \qquad (1.2.19)$$

$$\mathscr{A}_r(\Phi)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\sigma\Phi, \qquad (1.2.20)$$

$\mathscr{S}_r$ 和 $\mathscr{A}_r$ 分别称为 r 阶共变张量的对称化算子和反称化算子.

定理 1.2.6 算子 $\mathscr{S}_r$ 和 $\mathscr{A}_r$ 有以下性质：

(i) $\mathscr{S}_r$ 和 $\mathscr{A}_r$ 都是投影算子，即 $\mathscr{S}_r^2=\mathscr{S}_r$, $\mathscr{A}_r^2=\mathscr{A}_r$.

(ii) $\mathscr{S}_r(V_r)=\odot^r(V^*)$, $\mathscr{A}_r(V_r)=\wedge^r(V^*)$.

(iii) $\Phi\in V_r$ 是对称的，当且仅当 $\mathscr{S}_r(\Phi)=\Phi$;

$\Phi\in V_r$ 是反称的，当且仅当 $\mathscr{A}_r(\Phi)=\Phi$.

证明 仅对 $\mathscr{A}_r$ 进行证明. 设 $\tau\in\varphi(r)$ 为任一置换，则由 (1.2.16) 和 (1.2.20)，得

$$\tau\mathscr{A}_r\Phi(X_1, \cdots, X_r)=\mathscr{A}_r\Phi(X_{\tau(1)}, \cdots, X_{\tau(r)})$$
$$=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\Phi(X_{\sigma\tau(1)}, \cdots, X_{\sigma\tau(r)}). \qquad (1.2.21)$$

由于 sgn 为置换群 $\varphi(r)$ 到乘法群 $\{-1, +1\}$ 的同态，故

$$\mathrm{sgn}\,\sigma=\mathrm{sgn}\,\sigma\,\mathrm{sgn}\,\tau\,\mathrm{sgn}\,\tau=\mathrm{sgn}\,\sigma\tau\,\mathrm{sgn}\,\tau.$$

此外

$$\{\sigma|\sigma\in\varphi(r)\}=\{\sigma\circ\tau|\sigma\in\varphi(r)\}=\varphi(r),$$

故 (1.2.21) 的右侧成为

$$\frac{1}{r!}\operatorname{sgn}\tau\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma\tau)\Phi(X_{\sigma\tau(1)},\ \cdots,\ X_{\sigma\tau(r)})$$
$$=\operatorname{sgn}\tau\mathscr{A}_r\Phi(X_1,\ \cdots,\ X_r).$$

由于 $X_1, \cdots, X_r\in V$ 的任意性，即知

$$\tau\mathscr{A}_r\Phi=(\operatorname{sgn}\tau)\mathscr{A}_r\Phi,$$

也即 $\mathscr{A}_r\Phi\in\wedge^r(V^*)$，于是 $\mathscr{A}_r(V_r)\subset\wedge^r(V^*)$. 反之，设 $\Phi\in\wedge^r(V^*)$，即 $\sigma\Phi=(\operatorname{sgn}\sigma)\Phi$，故由(1.2.20)，

$$\mathscr{A}_r\Phi=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}\Phi=\Phi,$$

即有 $\wedge^r(V^*)\subset\mathscr{A}_r(V_r)$. 于是 $\mathscr{A}_r(V_r)=\wedge^r(V^*)$. 由此，性质 i) iii) 也容易证得. ∎

设 $f:V\to W$ 为两向量空间之间的线性映射，

$$W_r^*=\overbrace{W^*\otimes\cdots\otimes W^*}^{r}.$$

若对任意的 $\Psi\in W_r^*$, $X_1, \cdots, X_r\in V$，定义 $f^*\Psi\in V_r^*$ 为

$$(f^*\Psi)(X_1,\ \cdots,\ X_r)=\Psi(f(X_1),\ \cdots,\ f(X_r)),\qquad(1.2.22)$$

则得出 f 的一个诱导线性映射 $f^*:W_r^*\to V_r^*$.

关于映射 f^*，有下述性质

定理1.2.7 算子 $\mathscr{S}_r$, $\mathscr{A}_r$ 分别与 f^* 是可交换的，即

$$\mathscr{S}_r\circ f^*=f^*\circ\mathscr{S}_r,\quad \mathscr{A}_r\circ f^*=f^*\circ\mathscr{A}_r.$$

证明 仅以 $\mathscr{A}_r$ 为例证明. 由(1.2.22)

$$f^*\Psi(X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(r)})=\Psi(f(X_{\sigma(1)}),\ \cdots,\ f(X_{\sigma(r)})),$$

用 $\frac{1}{r!}\operatorname{sgn}\sigma$ 乘上式两边，且对 σ 遍及 $\varphi(r)$ 求和. 左端为

$$\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)f^*\Psi(X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(r)})=\mathscr{A}_r(f^*\Psi)(X_1,\ \cdots,\ X_r),$$

而右端由于 f^* 的线性性，故

$$\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)\Psi(f(X_{\sigma(1)}),\ \cdots,\ f(X_{\sigma(r)}))$$
$$=(\mathscr{A}_r\Psi)(f(X_1),\ \cdots,\ f(X_r))$$

$$=f^*(\mathscr{A}_r\Psi)(X_1,\cdots,X_r).$$

比较两边，由于 $X_1,\cdots,X_r\in V$，$\Psi\in W_r^*$ 的任意性，即得

$$\mathscr{A}_r\circ f^*=f^*\circ\mathscr{A}_r. \blacksquare$$

2.4 外代数

反称张量在流形理论的研究中起了重要的作用．为此，对反称张量作进一步讨论．我们已定义了 r 阶反称共变张量的空间

$$\wedge^r(V^*)=\mathscr{A}_r(V_r),\quad r\geqslant 2.$$

为方便起见，将 $\mathscr{A}_r$ 简写为 $\mathscr{A}$，再约定

$$\wedge^1(V^*)=V^*,\quad \wedge^0(V^*)=\boldsymbol{F}.$$

现在引入反称共变张量的外积运算

定义 1.2.7 设 $\Phi\in\wedge^r(V^*)$，$\Psi\in\wedge^s(V^*)$．映射 $\wedge:\wedge^r(V^*)\times\wedge^s(V^*)\to\wedge^{r+s}(V^*)$ 由下式定义

$$\Phi\wedge\Psi=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi),\tag{1.2.23}$$

$\wedge$ 称为外乘 $\Phi\wedge\Psi$ 称为 Φ 和 Ψ 的外积．

定理 1.2.8 外积是双线性的，且外积运算满足分配律，反交换律和结合律．即若 Φ、Φ_1、$\Phi_2\in\wedge^r(V^*)$，Ψ、Ψ_1、$\Psi_2\in\wedge^s(V^*)$，$\eta\in\wedge^t(V^*)$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{F}$，则有

(i) $(\alpha\Phi_1+\beta\Phi_2)\wedge\Psi=\alpha\Phi_1\wedge\Psi+\beta\Phi_2\wedge\Psi$;

$$\Phi\wedge(\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2)=\alpha\Phi\wedge\Psi_1+\beta\Phi\wedge\Psi_2;\tag{1.2.24}$$

(ii) $\Phi\wedge\Psi=(-1)^{rs}\Psi\wedge\Phi$;

(iii) $(\Phi\wedge\Psi)\wedge\eta=\Phi\wedge(\Psi\wedge\eta)$.

证明 由于 $\mathscr{A}:V_r\to V_r$ 是线性的，$\otimes:V_1\times V_2\to V_1\otimes V_2$ 是双线性的，故外乘积是双线性的，且满足分配律(i)．

由定义 1.2.7，$\Phi\wedge\Psi$ 是反称张量，故对任意的 $\tau\in\varphi(r+s)$，我们有

$$\tau(\Phi\wedge\Psi)=(\operatorname{sgn}\tau)\Phi\wedge\Psi.$$

现取

$$\tau=\begin{pmatrix}1, & \cdots, & r, & r+1, & \cdots, & r+s\\ s+1, & \cdots, & s+r, & 1, & \cdots, & s\end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{sgn}\tau=(-1)^{rs}$，故对任意的 $X_1, \cdots, X_{r+s}\in V$，有

$$\begin{aligned}
&(-1)^{rs}\Phi\wedge\Psi(X_1, \cdots, X_{r+s})\\
&=\Phi\wedge\Psi(X_{\tau(1)}, \cdots, X_{\tau(r+s)})\\
&=\Phi\wedge\Psi(X_{s+1}, \cdots, X_{s+r}, X_1, \cdots, X_s)\\
&=\frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)\Phi(X_{\sigma(s+1)}, \cdots, X_{\sigma(s+r)})\Psi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(s)})\\
&=\frac{(r+s)!}{r!s!}\mathscr{A}(\Psi\otimes\Phi)(X_1, \cdots, X_{r+s})\\
&=\Psi\wedge\Phi(X_1, \cdots, X_{r+s}),
\end{aligned}$$

从而(ii)得证．

现证(iii)．由(1.2.23)，对任意的 $X_1, \cdots, X_{r+s+t}\in V$，有

$$\begin{aligned}
&(\Phi\wedge\Psi)\wedge\eta(X_1, \cdots, X_{r+s+t})\\
&=\frac{1}{(r+s)!t!}\sum_{\sigma\in\varphi(r+s+t)}(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{1}{r!s!}\sum_{\tau\in\tilde{\varphi}(r+s)}\operatorname{sgn}\tau\\
&\quad\cdot\Phi(X_{\tau\sigma(1)}, \cdots, X_{\tau\sigma(r)})\cdot\Psi(X_{\tau\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\tau\sigma(r+s)})\\
&\quad\cdot\eta(X_{\sigma(r+s+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s+t)})
\end{aligned}$$

第二个和式记号中 $\tilde{\varphi}(r+s)$ 表示元素 $\sigma(1), \cdots, \sigma(r+s)$ 的置换群．于是对每一个固定的 $\tau\in\tilde{\varphi}(r+s)\subset\varphi(r+s+t)$，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\varphi(r+s+t)}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau\,\Phi(X_{\tau\sigma(1)}, \cdots, X_{\tau\sigma(r)})\\
&\quad\cdot\Psi(X_{\tau\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\tau\sigma(r+s)})\eta(X_{\sigma(r+s+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s+t)})\\
&=\sum_{\sigma\in\varphi(r+s+t)}(\operatorname{sgn}\sigma)\Phi(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)})\\
&\quad\cdot\Psi(X_{\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s)})\eta(X_{\sigma(r+s+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s+t)})\\
&=(r+s+t)!\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi\otimes\eta)(X_1, \cdots, X_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

故证得

$$(\Phi\wedge\Psi)\wedge\eta(X_1,\ \cdots,\ X_{r+s+t})$$
$$=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi\otimes\eta)\qquad\times(X_1,\ \cdots,\ X_{r+s+t}).$$
$$(1.2.25)$$

相仿，可得

$$\Phi\wedge(\Psi\wedge\eta)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi\otimes\eta)$$
$$=(\Phi\wedge\Psi)\wedge\eta.$$

推论 1 设 $\omega\in\wedge^1(V^*)=V^*$，则 $\omega\wedge\omega=0$. ∎

推论 2 设 $\{\omega^i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 为 V^* 的一组基，则有

$$\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}=r!\mathscr{A}(\omega^{i_1}\otimes\omega^{i_2}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r}),$$
$$(1\leqslant i_1,\ \cdots,\ i_r\leqslant n).\qquad(1.2.26)$$

以下考虑 V_r 的子空间 $\wedge^r(V^*)$ 的维数及基.

定理1.2.9 设 $\dim V=n$.

(i) 若 $r>n$，则 $\wedge^r(V^*)=\{0\}$.

(ii) 若 $n\geqslant r>0$，则 $\dim\wedge^r(V^*)=\binom{n}{r}$.

证明 由外积的反交换律得知，(1.2.26) 式的左侧仅当 $i_1,\ \cdots,\ i_r$ 全不相同时才不为零，故由 $\mathscr{A}$ 的线性性即知，当 $r>n$ 时，$\wedge^r(V^*)=\{0\}$.

设 $n\geqslant r>0$. 先来证明 $\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\}$ $(1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n)$ 是线性无关向量组. 若不然，则

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}=0,$$

且 $a_{i_1\cdots i_r}(1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n)$ 中至少有一个不为零. 不妨设 $a_{1\cdots r}\neq0$，用 $\omega^{r+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 外乘上式得

$$a_{1\cdots r}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\omega^{r+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n=0.$$

由(1.2.16)、(1.2.20) 和1.2.26)，得

$$0=a_{1\cdots r}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n(e_1,\ \cdots,\ e_n)=a_{1\cdots r},$$

这与所设矛盾. 因为 $\wedge^r(V^*)=\mathscr{A}(V_r)$, 由 $\mathscr{A}$ 的线性和(1.2.26), 即知$\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\}$ $(1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n)$为 $\wedge^r(V^*)$的一组基. 其所含向量的个数等于$\binom{n}{r}$, 从而

$$\dim\wedge^r(V^*)=\binom{n}{r}.$$

推论 设 $\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r\in V^*$, $\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r$ 线性相关的充要条件是 $\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r=0$.

今设 $\dim V=n$, 令

$$\wedge(V^*)=\sum_{r=0}^{n}\oplus\wedge^r(V^*),$$

则由定理 1.2.9, $\wedge(V^*)$ 为 2^n 维向量空间, 且根据定理 1.2.8, $\wedge(V^*)$关于外乘积$\wedge$构成 $\boldsymbol{F}$ 上的一个结合代数, 它称为向量空间 V^* 上的外代数或 Grassmann 代数. 易见

$$\{1,\ \omega^i(1\leqslant i\leqslant n),\quad \omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}(1\leqslant i_1<i_2\leqslant n),\ \cdots,\ \omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n\}$$

是 $\wedge(V^*)$的一组基.

使用定理 1.2.9 中所述 $\wedge^r(V^*)$的一组基, $\Psi\in\wedge^r(V^*)$可表成

$$\Psi=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}. \tag{1.2.27}$$

但另一方面, $\Psi\in V_r$, 且为反称张量, 故

$$\Psi=b_{j_1\cdots j_r}\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_r},\quad 1\leqslant j_1,\cdots,j_r\leqslant n,$$

其中分量 $b_{j_1\cdots j_r}$ 是反称的, 即

$$b_{j_1\cdots j_r}=\begin{cases}0, & j_1,\ \cdots,\ j_r\ \text{中有相同时;}\\ (\operatorname{sgn}\tau)b_{j_{\tau(1)}\cdots j_{\tau(r)}}, & \tau\in\varphi(r)\end{cases}$$

因为 $A\Psi=\Psi$, 再利用(1.2.26)式, 得

$$\Psi=\frac{1}{r!}b_{j_1\cdots j_r}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r},\tag{1.2.28}$$

和

$$b_{j_1\cdots j_r}=a_{j_1\cdots j_r},\quad 1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n.\tag{1.2.29}$$

因此，对 $\Psi\in\wedge^r(V^*)$，最终可以表成

$$\Psi=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$
$$=\frac{1}{r!}a_{j_1\cdots j_r}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r},\quad 1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n.\tag{1.2.27$'$}$$

使用后一个求和的形式是比较方便的，要注意的是，这时 $a_{j_1\cdots j_r}$ 关于下标是反称的.

现设 $\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r\in V^*$，且可表成

$$\theta^\alpha=b_i^\alpha\omega^i,\quad \alpha=1,\ \cdots,\ r,\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

则有

$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r=b_{j_1}^1\cdots b_{j_r}^r\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r},\ 1\leqslant j_1\cdots j_r\leqslant n,$$

另一方面，$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r\in\wedge^r(V^*)$，故

$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^r=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}a_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}.$$

因此得

$$a_{i_1\cdots i_r}=\sum_{\tau\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\tau)b_{i_{\tau(1)}}^1\cdots b_{i_{\tau(r)}}^r,\quad (i_1<\cdots<i_r).\tag{1.2.30}$$

特别，若 $r=n$，则得

$$\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n=\det(b_k^j)\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n.\tag{1.2.31}$$

以下再给出有关外乘积的几个很有用的结果.

定理 1.2.10(Cartan 引理)　设 $\omega^i,\ \theta^j\in V^*$，$i,\ j=1,\ \cdots,\ r$ $(r<n=\dim V^*)$. 且设 $\omega^1,\ \cdots,\ \omega^r$ 是线性无关的. 则

$$\sum_{i=1}^r\omega^i\wedge\theta^i=0$$

的充分必要条件是

$$\theta^i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\omega^j,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ r).\qquad(1.2.32)$$

证明 选取 $\omega^{r+1}, \cdots, \omega^n$, 使得 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$ 为 V^* 的一组基。于是

$$\theta^i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\omega^j+\sum_{p=r+1}^{n}a_{ip}\omega^p,$$

且

$$\sum_{i=1}^{r}\omega^i\wedge\theta^i=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}(a_{ij}-a_{ji})\omega^i\wedge\omega^j+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ r+1\leqslant p\leqslant n}}a_{ip}\omega^i\wedge\omega^p.$$

由于 $\{\omega^h\wedge\omega^k\}_{1\leqslant h<k\leqslant n}$ 是 $\wedge^2(V^*)$ 的一组基，故

$$\sum_{i=1}^{r}\omega^i\wedge\theta^i=0$$

等价于 $a_{ij}=a_{ji},\ a_{ip}=0\ (1\leqslant i,\ j\leqslant r,\ r+1\leqslant p\leqslant n)$. ∎

定理 1.2.11 设 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 是 V^* 中 r 个线性无关的向量，$\Phi\in\wedge^s(V^*)$，则存在 $\Psi^1, \cdots, \Psi^r\in\wedge^{s-1}(V^*)$，使得

$$\Phi=\omega^1\wedge\Psi^1+\cdots+\omega^r\wedge\Psi^r\qquad(1.2.33)$$

成立的充要条件是

$$\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\Phi=0.\qquad(1.2.34)$$

证明 若有(1.2.33)式，则显然(1.2.34)成立，现证明其逆。把 $\omega^1, \cdots, \omega^r$ 扩充为 V^* 的一组基 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$. 一般地，有

$$\Phi=\omega^1\wedge\Psi^1+\cdots+\omega^r\wedge\Psi^r+\sum_{r+1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}a_{i_1\cdots i_s}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_s},\qquad(1.2.35)$$

其中 $\Psi^1, \cdots, \Psi^r\in\wedge^{s-1}(V^*)$. 当 $r+s>n$ 时，即有(1.2.33). 现设 $r+s\leqslant n$, 由(1.2.34)式，有

$$\sum_{r+1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n}a_{i_1\cdots i_s}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r\wedge\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_s}=0.$$

注意到 $\{\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_{r+s}}\}_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{r+s}\leqslant n}$ 是 $\wedge^{r+s}(V^*)$ 的一组基，即得 $a_{i_1\cdots i_s}=0,\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant n$. 代回(1.2.35)，即得(1.2.33).

对于$\omega^1, \cdots, \omega^r \in V^*$，$\Phi \in \wedge^s(V^*)$，若存在$\Psi^1, \cdots, \Psi^r \in \wedge^{s-1}(V^*)$使得(1.2.33)成立，则称$\Phi=0$是组$\omega^p=0(p=1, \cdots, r)$的代数推论，或写成

$$\Phi \equiv 0(\bmod\ \omega^1, \cdots, \omega^r).$$

推论 设$\omega^1, \cdots, \omega^r \in V^*$是线性无关的，$\Phi \in \wedge^2(V^*)$，使$\Phi \equiv 0(\bmod\ \omega^1, \cdots, \omega^r)$，即存在$\theta^i \in V^*$使

$$\Phi=\sum_{i=1}^{r} \omega^i \wedge \theta^i,$$

它的充要条件是$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^r \wedge \Phi=0$.

在§2.3中，我们已提及线性映射$f: V \to W$的诱导线性映射$f^*: W_r^* \to V_r^*$. 特别，有诱导线性映射$f^*: \wedge^r(W^*) \to \wedge^r(V^*)$. 现在来证明.

定理1.2.12 设$f: V \to W$为线性映射，则诱导映射$f^*: \wedge^t(W^*) \to \wedge^t(V^*)$与外乘$\wedge$是可交换的. 即对于任意的$\Phi \in \wedge^r(W^*)$，$\Psi \in \wedge^s(W^*)$(其中$r+s=t$)，有

$$f^*(\Phi \wedge \Psi)=f^*\Phi \wedge f^*\Psi. \tag{1.2.36}$$

证明 对于任意的$X_1, \cdots, X_{r+s} \in V$，

$$\begin{aligned}
&f^*(\Phi \wedge \Psi)(X_1, \cdots, X_{r+s}) \\
&=(\Phi \wedge \Psi)(f(X_1), \cdots, f(X_{r+s})) \\
&=\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \wp(r+s)} (\operatorname{sgn} \sigma) \Phi(f(X_{\sigma(1)}), \cdots, f(X_{\sigma(r)})) \\
&\quad \cdot \Psi(f(X_{\sigma(r+1)}), \cdots, f(X_{\sigma(r+s)})) \\
&=\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)(f^*\Phi)(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}) \\
&\quad \cdot (f^*\Psi)(X_{\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s)}) \\
&=\frac{(r+s)!}{r!s!} \mathscr{A}(f^*\Phi \otimes f^*\Psi)(X_1, \cdots, X_{r+s}) \\
&=(f^*\Phi) \wedge (f^*\Psi)(X_1, \cdots, X_{r+s}),
\end{aligned}$$

即得证. ∎

由上述定理，即知 f^* 是外代数 $\wedge(W^*)$ 到外代数 $\wedge(V^*)$ 的同态，即 $V\to W$ 的同态 f 诱导了 $\wedge(W^*)\to\wedge(V^*)$ 的同态 f^*.

2.5 欧氏向量空间

定义 1.2.8 设 V 为 $\boldsymbol{R}$ 上 n 维向量空间，$g\in\odot^2(V^*)$，即 g 为二阶共变对称张量，若对于任意的非零向量 $X\in V$，都有

$$g(X,\ X)>0,\quad X\neq 0,\tag{1.2.37}$$

则称 g 是**正定的**.

设 $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 为 V 的一组基，$\{\omega^i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 为 V^* 中的对偶基，于是

$$g=g_{ij}\,\omega^i\otimes\omega^j,\quad g_{ij}=g(e_i,\ e_j).$$

设 $X=X^ie_i$，则 $g(X,\ X)=g_{ij}X^iX^j$. 故张量 g 为正定的充要条件是矩阵 $G=(g_{ij})$ 是正定的.

我们知道，V 上的内积是一个映射 $\langle\ ,\ \rangle:V\times V\to\boldsymbol{R}$. $(X,\ Y)\mapsto\langle X,\ Y\rangle$，使得对于任意的 $X,\ Y,\ Z\in V$，$\alpha\in\boldsymbol{R}$ 满足：

$$\begin{aligned}&(\text{i})\ \langle X,\ Y\rangle=\langle Y,\ X\rangle;\\&(\text{ii})\ \langle\alpha X,\ Y\rangle=\alpha\langle X,\ Y\rangle;\\&(\text{iii})\ \langle X+Y,\ Z\rangle=\langle X,\ Z\rangle+\langle Y,\ Z\rangle;\\&(\text{iv})\ \langle X,\ X\rangle\geqslant 0,\ \text{且等号仅当}\ X=0\ \text{时成立}.\end{aligned}\tag{1.2.38}$$

于是，利用二阶对称正定共变张量 g 就可以定义内积

$$(X,\ Y)\mapsto\langle X,\ Y\rangle=g(X,\ Y).$$

反之，由内积也可确定一个二阶对称正定共变张量. 即在 V 上给定一个内积等价于给定一个正定的 $g\in\odot^2(V^*)$.

利用内积可在 V 中引入范数. $X\in V$ 的范数，或称为 X 的长度，定义为

$$\|X\|=\langle X,\ X\rangle^{1/2}\tag{1.2.39}$$

$\|X\|=1$ 的向量称为**单位向量**. 对于 $X,\ Y\in V$，其距离 $d(X,\ Y)$

定义为

$$d(X,\ Y)=\|X-Y\|. \tag{1.2.40}$$

对于内积还有 Schwarz 不等式

$$\langle X,\ Y\rangle\leqslant\|X\|\cdot\|Y\|,$$

及三角不等式

$$\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|.$$

定义 1.2.9 向量空间 V 连同其上的内积(由 g 确定)以及范数一起称为关于内积$\langle\ ,\ \rangle_g$或度量(张量)g 的**欧氏向量空间**. 今后将简记成$(V,\ g)$.

在欧氏向量空间$(V,\ g)$中,可引入角度这一重要的几何概念. 据Schwarz 不等式,对于任意的两个向量 X、$Y\in V$,$X\neq0$,$Y\neq0$,由下式确定唯一的一个角度 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

$$\cos\theta=\langle X,\ Y\rangle/\|X\|\cdot\|Y\|. \tag{1.2.41}$$

如果$\theta=0$, 即 $\langle X,\ Y\rangle=0$, 则称向量 X 和 Y **是正交的**. $(V,\ g)$的 $n(=\dim V)$个两两正交的单位向量称为 V 的(一组)**正交规范基**,或称**正交规范标架**,简称**么正基**或**么正标架**.

命题 1.2.13 在欧氏向量空间$(V,\ g)$中,存在正交规范基.

证明 设 $\bar{e}_1,\ \cdots,\ \bar{e}_n$ 为 V 的任一组基,定义

$$e_1=\bar{e}_1/\|\bar{e}_1\|,$$

再归纳地定义

$$e_k=\left(\bar{e}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle e_i,\ \bar{e}_k\rangle e_i\right)\Bigg/\left\|\bar{e}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\langle e_i,\ \bar{e}_k\rangle e_i\right\|.$$

直接可验证$\{e_k\}_{1<k<n}$为一组正交规范基, 以上过程称为 Schmidt 正交化. ∎

对于$(V,\ g)$的一组正交规范基$\{e_i\}$,

$$g_{ij}=g(e_i,\ e_j)=\langle e_i,\ e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

且对于任意的 $X, Y\in V$, $X=X^ie_i, Y=Y^ie_i$, $\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^n X^iY^i$. 即为通常欧氏空间中笛卡尔坐标系下的数量积. 所以使用正交规范基常给计算带来方便.

在欧氏向量空间(V, g)中,设 $e_1, \cdots, e_n$为一组基,$\omega^1, \cdots, \omega^n$为其在$V^*$中对偶基. 因为$G=(g_{ij})$是对称正定矩阵, 故存在逆矩阵$G^{-1}=(g^{ij})$,使得

$$g_{ij}g^{ik}=\delta_j^k, \quad g^{ij}=g^{ji}. \tag{1.2.42}$$

$\tilde{g}=g^{ij}e_i\otimes e_j\in V_0^2$是一个$(2, 0)$型对称张量, 它称为$g=g_{ij}\omega^i\otimes\omega^j$的共轭张量.

今考虑线性映射$f:V\to V^*$,它由以下方式给定. 令

$$f(e_i)=g_{ij}\omega^j,$$

再作线性扩张,故对任意的$X=X^ie_i$,有

$$f(X)=X^ig_{ij}\omega^j.$$

由此,易见f为单射. 而对任意的$\sigma=\sigma_i\omega^i\in V^*$, 则有$\sigma_ig^{ij}e_j$使得

$$f(\sigma_ig^{ij}e_j)=\sigma_i\omega^i,$$

故f又是满射. 因而$f:V\to V^*$是同构. $\langle V^*, \tilde{g}\rangle$也为欧氏向量空间,其内积为

$$\tilde{g}(\omega^i, \omega^j)=\langle\omega^i, \omega^j\rangle=g^{ij}.$$

故据(1.2.42),对任意的$X, Y\in V$,有

$$\langle X, Y\rangle=\langle f(X), f(Y)\rangle,$$

即有

命题1.2.14 欧氏向量空间(V, g)和$(V^*, \tilde{g})$是自然同构的.

由上所述,借助V的度量(张量)g可建立自然同构: $(V,g)\to(V^*, \tilde{g})$,从而可把V和V^*看作等同. 更精确些

$$V \ni X^i e_i \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftharpoons}} X_i \omega^i \in V^*,$$

其中 $X_i = g_{ij} X^j$, $X^i = g^{ij} X_j$, 此时我们称 X^i 是向量 X 的反变分量, X_i 为 X 的共变分量. 特别, 在一组正交规范基下, $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, $X^i = X_i$, 因此不必区分共变和反变分量.

相仿, 利用 g 可自然地在 V^r_s 中引入度量使之成为欧氏向量空间. 例如考虑 V^1_2, 令

$$\Phi = \Phi^i_{jk} e_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k, \quad \Psi = \Psi^i_{jk} e_i \otimes \omega^j \otimes \omega^k,$$

则 V^1_2 的内积

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \Psi \rangle &= \Phi^{i_1}_{j_1 k_1} \Psi^{i_2}_{j_2 k_2} \langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle \langle \omega^{j_1}, \omega^{j_2} \rangle \langle \omega^{k_1}, \omega^{k_2} \rangle \\ &= g_{i_1 i_2} g^{j_1 j_2} g^{k_1 k_2} \Phi^{i_1}_{j_1 k_1} \Psi^{i_2}_{j_2 k_2} \equiv \Phi_{ijk} \Psi^{ijk}, \end{aligned}$$

其中

$$\Phi_{ijk} = g_{ih} \Phi^h_{jk}, \quad \Psi^{ijk} = g^{jh} g^{kl} \Psi^i_{hl},$$

Φ 的长度

$$\|\Phi\| = (\Phi_{ijk} \Phi^{ijk})^{1/2},$$

特别, 对于 (V, g) 的正交规范基

$$\|\Phi\| = \left[\sum_{i,j,k=1}^{n} (\Phi_{ijk})^2 \right]^{1/2}.$$

习　　题

1. 设映射 $F: U(\subset \mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^n$, $a \in U$, 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使当 $\|x - y\| < \delta$ 时, 都有 $\|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$, 则称映射 F 在点 a 是连续的. 证明: F 在点 a 连续的充要条件是 n 个分量函数 $f^1, \cdots, f^n$ 在点 a 都是连续的.

2. 设 U、V、W 是 $\mathbf{R}^m$ 的开子集. $F: U \to V$, $G: V \to W$ 都是满射, $H = G \circ F: U \to W$. 证明: F、G、H 中有两个是微分同胚时, 则第三个也是微分同胚.

3. 证明定理 1.1.4 的推论 1 及推论 2.

4. 证明定理 1.1.6 的推论.

5. 举例说明两个对称(反称)张量的张量积未必为对称(反称)张量.

6. 证明定理 1.2.6、定理 1.2.7 中关于对称算子 $\mathscr{S}_r$ 的论述.

7. 设 $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$, $\dim V = m(>r)$. 证明: $\theta^1, \cdots, \theta^r$ 线性无关的充要条件是 $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r \neq 0$.

8. 设 $\theta^1, \cdots, \theta^r \in V^*$, $X_1, \cdots, X_r \in V$. 证明

$$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^r(X_1, \cdots, X_r) = \det(\langle \theta^i, X_j \rangle), \quad i, j = 1, \cdots, r,$$

其中 $\langle \theta^i, X_j \rangle = \theta^i(X_j)$.

9. 设 $\varphi \in \wedge^r(V^*)$, $X \in V$, 定义 $i(X)\varphi \in \wedge^{r-1}(V^*)$ 如下: 对于任意的 $X_1, \cdots, X_{r-1} \in V$,

$$i(X)\varphi(X_1, \cdots, X_{r-1}) = \varphi(X, X_1, \cdots, X_{r-1}).$$

证明: 1° $i(X): \wedge^r(V^*) \to \wedge^{r-1}(V^*)$, $\varphi \mapsto i(X)\varphi$ 为线性映射; 2° 若 $\varphi \in \wedge^r(V^*)$, $\psi \in \wedge^s(V^*)$, 则有

$$i(X)(\varphi \wedge \psi) = i(X)\varphi \wedge \psi + (-1)^r \varphi \wedge i(X)\psi.$$

10. 试证: 任一二阶共变张量可写成一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量之和.

11. 证明(1, s)型张量可看成 $\overbrace{V \times \cdots \times V}^{s\text{个}}$ 到 V 的多线性映射.

12. 若三阶共变张量 Φ 满足 $\Phi(X, Y, Z) = \Phi(Y, X, Z)$ 和 $\Phi(X, Y, Z) = -\Phi(X, Z, Y)$, 则 Φ 必为零张量.

13. 试证: 在任一组基下, Kronecker delta δ^i_j 是一个(1, 1)型张量的分量.

14. 设(V, g)为欧氏向量空间, a 为二阶对称共变张量. 设在一组基下, 有

$$g_{ij}a_{kl} - g_{il}a_{jk} + g_{jk}a_{il} - g_{kl}a_{ij} = 0,$$

则 $a = \rho g$, 这里 ρ 为数量.

15. 设(V, g)为欧氏向量空间, a 为二阶对称共变张量. 定义线性映射 $a^*: V \to V$ 如下:

$$\langle a^*(X), Y \rangle = a(X, Y), \quad X, Y \in V,$$

其中⟨ , ⟩为内积, 证明:

1° 设 ρ_i 为 a^* 的特征值, $\tilde{e}_i$ 为特征向量. 若 $\rho_i \neq \rho_j$, 则 $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = 0$. 因此, 若记 $a = \tilde{a}_{ij}\tilde{\omega}^i \otimes \tilde{\omega}^j$, 其中$\{\tilde{\omega}^i\}$是$\{\tilde{e}_i\}$的对偶基, 则 $\tilde{a}_{ij} = \rho_i \delta_{ij}$.

2° 设$\{\tilde{e}_i\}$为由特征向量构成的一组正交规范基，$\{e_i\}$为任一组基，且设$\tilde{e}_i=\lambda_i^j e_j$. 若记 $a=a_{ij}\omega^i\otimes\omega^j$，其中$\{\omega^i\}$ 是$\{e_i\}$的对偶基，则

$$a_{ij}=\sum_h \rho_h\lambda_{(h)i}\lambda_{(h)j},$$

其中 $\lambda_{(h)i}=g_{ij}\lambda_h^j$, $\quad g_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle$.

第二章　微分流形

§1　微分流形的基本概念

1.1　微分流形的定义

众所周知，在 $\boldsymbol{R}^2$ 上可引入坐标系，使得点 p 与坐标 $(x(p), y(p))$ 是一一对应的，并且点列 $p_n \to p^*$，当且仅当 $x_n(p_n) \to x^*(p^*)$，$y_n(p_n) \to y^*(p^*)$．但对于球面 S^2，由拓扑学知，它与 $\boldsymbol{R}^2$ 不是同胚的，所以不存在一个整体坐标系，使得 S^2 上的点与坐标一一对应，并且 S^2 也不能与 $\boldsymbol{R}^2$ 的开子集同胚．为此，一种自然的办法是将 S^2 分成几个部分，使得每一部分与 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个开集同胚，从而在每一部分上分别可建立坐标系，这就导致微分流形的概念．

定义 2.1.1　设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间，若对每一点 $p \in M$，都有 p 的一个邻域 U 和 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个开集同胚，则称 M 为 m **维拓扑流形**．

设 $\varphi_U: U \to \varphi_U(U) \subset \boldsymbol{R}^m$ 是上述定义中的一个同胚映射．π^i: $\varphi_U(U) \to \boldsymbol{R}$ 表示到第 i 个坐标的投影．对每一点 $q \in U$，定义它的 m 个坐标为 $x^i(q) = \pi^i(\varphi_U(q))$，$i = 1, \cdots, m$．于是 $x^i = \pi^i \circ \varphi_U$ 是 U 上的实值函数，称为**第 i 个坐标函数**．(U, φ_U) 称为 M 的**坐标图**，亦称为**坐标卡**，或**坐标邻域**．

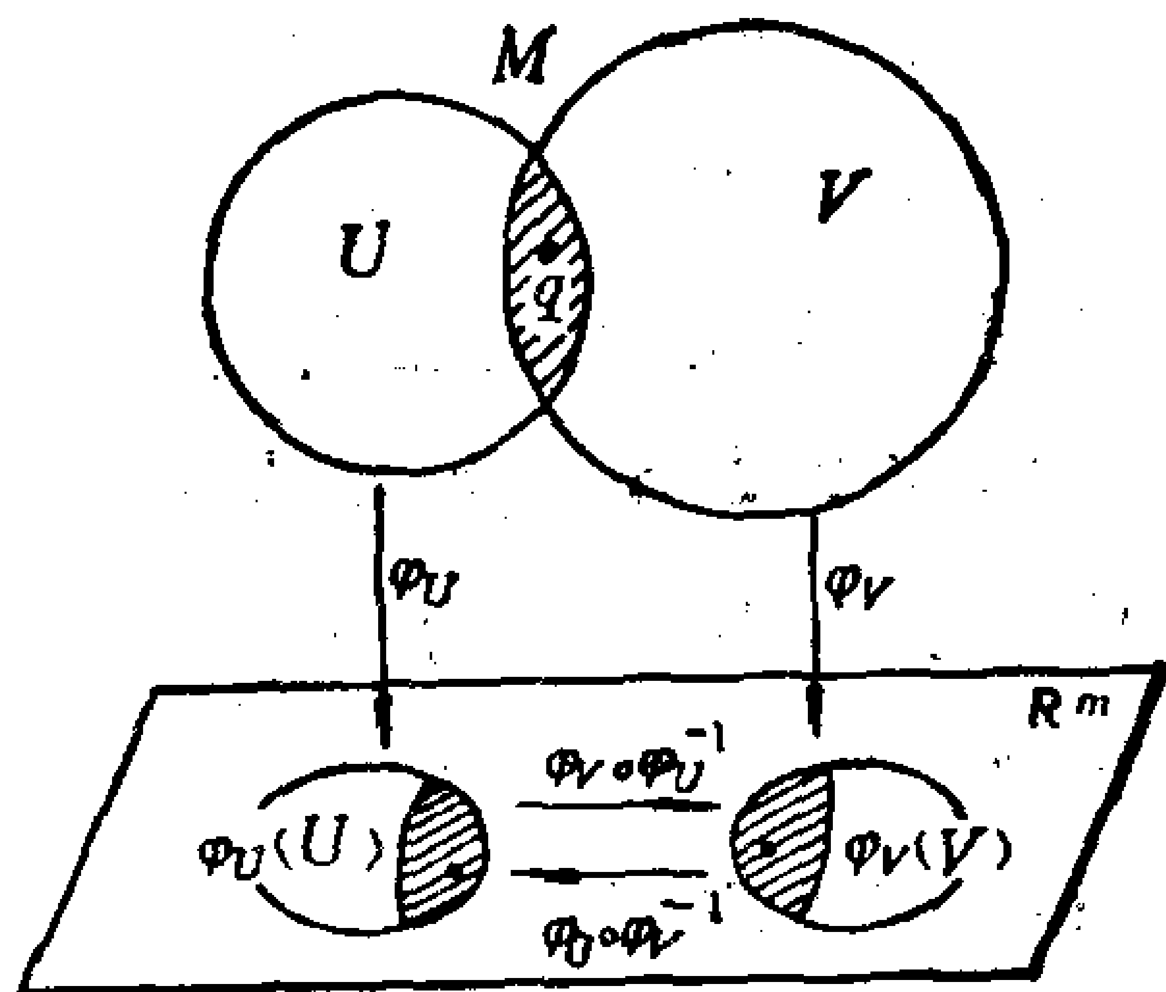


图 1

若 q 也位于另一个坐标图

(V, φ_V)中，设它的坐标函数为$\bar{x}^i(q)$, $i=1, \cdots, m$. 由于φ_U和φ_V都是同胚映射，故确定了$\boldsymbol{R}^m$中两个开集$\varphi_U(U\cap V)$和$\varphi_V(U\cap V)$之间的同胚(图1)，即

$$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}:\varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V).$$

借助坐标函数，$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$可表达为

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1, \cdots, x^m), \quad i=1, \cdots, m. \tag{2.1.1}$$

类似地，对于同胚$\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}:\varphi_V(U\cap V)\to\varphi_U(U\cap V)$，有

$$x^i=x^i(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m), \quad i=1, \cdots, m. \tag{2.1.1$'$}$$

定义 2.1.2 设M为m维拓扑流形，

(i) M的一个坐标图开覆盖

$$\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\mathscr{A}, \mathscr{A}\text{ 为指标集}, \bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}U_\alpha=M\}$$

称为一个**坐标图册**.

(ii) 若$\mathscr{U}$中，对任何$\alpha, \beta\in\mathscr{A}$，当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时，$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$为$C^k$映射，即坐标变换函数(2.1.1)是$C^k$的，则称$\mathscr{U}$为$C^k$**坐标图册**，这时称$\mathscr{U}$中的坐标图是$C^k$**相容的**.

(iii) 若$\mathscr{U}$是最大的C^k坐标图册，即对于M的任一坐标图(V, φ_V)，当它与$\mathscr{U}$的坐标图C^k相容时，它也一定属于$\mathscr{U}$. 那末，$\mathscr{U}$称为M上的一个C^k**可微结构**，或C^k**微分结构**. $\mathscr{U}$中的坐标图称为M的**容许坐标图**.

定义 2.1.3 设M是m维拓扑流形，$\mathscr{U}$是M上一个C^k可微结构，则称$(M, \mathscr{U})$为m维C^k**可微流形**，亦称m维C^k**微分流形**，简称M为m维C^k**流形**. 特别，一个C^∞可微流形称为**光滑流形**，C^ω可微流形称为**解析流形**.

设M是m维拓扑流形，且具有C^k坐标图册

$$\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\mathscr{A}\}.$$

记　　$\widetilde{\mathscr{U}}=\{(U,\ \varphi)\mid(U,\ \varphi)$为 M 的坐标图，且与 $\mathscr{U}$ 中所有坐标图均 C^k 相容$\}$.

设$(U,\ \varphi)$、$(U',\ \varphi')\in\widetilde{\mathscr{U}}$，且 $U\cap U'\neq\varnothing$. 设 $p\in U\cap U'$，则必有 $\beta\in\mathscr{A}$，使得 $p\in U_\beta$，因而 $p\in U\cap U'\cap U_\beta\equiv W$. 在 W 上

$$\varphi'\circ\varphi^{-1}=\varphi'\circ\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\beta\circ\varphi^{-1},$$

由 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 的定义，$\varphi'\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(W)\to\varphi'(W)$，$\varphi_\beta\circ\varphi^{-1}:\varphi(W)\to\varphi_\beta(W)$均为 C^k 微分同胚，故 $\varphi'\circ\varphi^{-1}:\varphi(W)\to\varphi'(W)$为 C^k 微分同胚，即 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 中任何两个坐标图都是 C^k 相容的. 又 $\mathscr{U}\subset\widetilde{\mathscr{U}}$，故 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是一个 C^k 坐标图册，而且任何的坐标图$(V,\ \psi)$，若与 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 中所有的坐标图 C^k 相容时，它也与 $\mathscr{U}$ 中的所有坐标图相容，即$(V,\ \psi)\in\widetilde{\mathscr{U}}$. 于是，$\widetilde{\mathscr{U}}$ 是 M 上的一个 C^k 可微结构，而$(M,\ \widetilde{\mathscr{U}})$是一个 m 维 C^k 微分流形. 由以上讨论可知，只要给出拓扑流形 M 的一个 C^k 坐标图册，就可以构造 M 上的一个 C^k 可微结构，从而 M 为 C^k 流形.

为了提供微分流形有某种分析和几何结构，一般，在微分流形的定义中，对拓扑空间 M 附加具有可数基的要求.

例 1　$\boldsymbol{R}^m$ 是一个 m 维的解析流形.

例 2　$\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的单位球面

$$S^m=\left\{(x^1,\ \cdots,\ x^{m+1})\in\boldsymbol{R}^{m+1}\middle|\sum_{i=1}^{m+1}(x^i)^2=1\right\}.$$

取 S^m 的拓扑为它在 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的相对拓扑，则 S^m 是一个具有可数基的 Hausdorff 空间. 记

$$\widetilde{U}_i^+=\{(x^1,\ \cdots,\ x^{m+1})\mid x^i>0\};$$
$$\widetilde{U}_i^-=\{(x^1,\ \cdots,\ x^{m+1})\mid x^i<0\},\quad i=1,\ \cdots,\ m+1.$$

它们都是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的开集. 相对开集 $U_i^\pm=\widetilde{U}_i^\pm\cap S^m(i=1,\ \cdots,\ m+1)$覆盖 S^m. 定义映射 $\varphi_i^\pm:U_i^\pm\to\boldsymbol{R}^m$ 如下:

$$\varphi_i^\pm(x^1,\ \cdots,\ x^{m+1})=(x^1,\ \cdots,\ \hat{x}^i,\ \cdots,\ x^{m+1}),$$

“∧”表示去掉此坐标. 容易看出，这些映射分别是 $U_i^\pm$ 到 $W_i=$

$\{(x^1, \cdots, \hat{x}^i, \cdots, x^{m+1}) \in \boldsymbol{R}^m \mid (x^1)^2 + \cdots + (\hat{x}^i)^2 + \cdots + (x^{m+1})^2 < 1\}$ 的同胚. 因此 S^m 是局部欧氏的. 由定义 2.1.1, S^m 是 m 维拓扑流形.

再考虑 $\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1} : \varphi_1^+(U_2^- \cap U_1^+) \to \varphi_2^-(U_2^- \cap U_1^+)$,

$$(x^2, \cdots, x^{m+1}) \xrightarrow{(\varphi_1^+)^{-1}} \left(\left[1 - \sum_{i=2}^{m+1} (x^i)^2\right]^{1/2}, x^2, \cdots, x^{m+1}\right)$$

$$\xrightarrow{\varphi^-} \left(\left[1 - \sum_{i=2}^{m+1} (x^i)^2\right]^{1/2}, x^3, \cdots, x^{m+1}\right).$$

改变记号, 以 $(u^1, u^2, \cdots, u^m)$ 作为 U_1^+ 上点的坐标, $(v^1, v^2, \cdots, v^m)$ 作为 U_2^- 上点的坐标. 于是, $\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1}$ 的坐标表达式为

$$v^1 = \left[1 - \sum_{i=1}^{m} (u^i)^2\right]^{1/2}, \quad v^\alpha = u^\alpha, \quad (\alpha = 2, \cdots, m).$$

显然, $v^i (i=1, \cdots, m)$ 是 $u^j (j=1, \cdots, m)$ 的 C^∞ 函数. 于是坐标图 (U_1^+, φ_1^+), (U_2^-, φ_2^-) 是 C^∞ 相容的. 同理可证, 坐标图 $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$, $i=1, \cdots, m+1$ 是 C^∞ 相容的, 从而 S^m 为 m 维光滑流形.

例 3 积流形 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 微分流形. 它们的微分结构分别为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ 和 $\{(V_\beta, \psi_\beta) \mid \beta \in \mathscr{B}\}$, 作拓扑积 $M \times N$, 显然 $\{U_\alpha \times V_\beta \mid \alpha \in \mathscr{A}, \beta \in \mathscr{B}\}$ 是拓扑空间 $M \times N$ 的开覆盖. 再定义映射 $\varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{m+n}$ 如下:

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)),$$
$$(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta \subset M \times N.$$

$(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ 是 $M \times N$ 的坐标图. 容易证明, 这些坐标图都是 C^k 相容的, 因此决定了 $M \times N$ 的 C^k 微分结构. $M \times N$ 成为 $m+n$ 维 C^k 流形. 它称为 C^k 流形 M 和 N 的**积流形**.

环面 $T = S^1 \times S^1$ 是两个圆周 S^1 的直积. S^1 是 1 维 C^∞ 微分流形, 因此 T 是 2 维 C^∞ 微分流形. 同样地, $T^m = \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{m}$ 是 m 维 C^∞ 微分流形.

例 4 开子流形 设 U 为 C^k 流形 M 的开子集. M 的微分结构为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha\in\mathscr{A}\}$. 令 $V_\alpha=U_\alpha\cap U$, $\psi_\alpha=\varphi_\alpha|_{V_\alpha}$, 则 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)|\alpha\in\mathscr{A}\}$是 U 上的 C^k 微分结构,从而 U 为 C^k 流形. 它称为 M 的开子流形.

以 $\mu_{mn}(\boldsymbol{R})$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 上 $m\times n$ 矩阵的集合. 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 对应于

$$(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn})\in\boldsymbol{R}^{mn}.$$

使用这个等同映射, $\mu_{mn}(\boldsymbol{R})$上定义了自然拓扑和 C^ω 微分结构. $\mu_{mn}(\boldsymbol{R})$为 mn 维 C^ω 流形.

设 $$GL(n, \boldsymbol{R})=\{A\in\mu_{mn}(\boldsymbol{R})|\det A\neq 0\},$$

显然, $GL(n, \boldsymbol{R})\subset\mu_{mn}(\boldsymbol{R})$, 因为 $\det A$ 是 A 的元素 a_{ij} 的多项式, 故 $GL(n, \boldsymbol{R})$是 $\mu_{mn}(\boldsymbol{R})$的开集, 从而它为开子流形.

注意, 对于同一拓扑流形, 可以给出不同的微分结构.

例 设 $\varphi^*:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 由 $\varphi^*(x)=x^3$ 定义, 则$(\boldsymbol{R}, \varphi^*)$是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 C^ω 图册, 它唯一决定 $\boldsymbol{R}$ 上的一个微分结构 $\mathscr{U}'$. 另一方面, 由 $\varphi(x)=x$ 定义的$(\boldsymbol{R}, \varphi)$是 $\boldsymbol{R}$ 上自然的 C^ω 图册, 它也决定 $\boldsymbol{R}$ 上的一个微分结构 $\mathscr{U}$. 这两个微分结构 $\mathscr{U}'$ 和 $\mathscr{U}$ 是不同的. 事实上, 坐标变换 $\varphi\circ(\varphi^*)^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可微, 所以$(\boldsymbol{R}, \varphi^*)$和$(\boldsymbol{R}, \varphi)$不是 $C^k(k>1)$相容的坐标图.

1.2 实射影空间 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ Grassmann 流形

下面给出微分流形的两个重要例子, 它们都是抽象流形.

设 X 是一个拓扑空间, $\sim$ 为 X 上的一个等价关系. 用$[x]=\{y\in X|y\sim x\}$表示 x 的等价类. 对于任一个子集 $A\subset X$, 用$[A]=\bigcup_{a\in A}[a]$表示与 A 中元素等价的全部元素. 以 $X/\sim$ 表示等价类的集合. $\pi:X\to X/\sim$, $x\mapsto[x]$表示自然射影 $\pi(x)=[x]$. 且在 $X/\sim$ 上定义标准商拓扑, 即若 $\pi^{-1}(U)$是 X 的开集, 则定义 U 为

$X/\sim$ 的开集. 显然, 射影 π 是连续映射. 我们称拓扑空间 $X/\sim$ 是 X 关于等价关系~的商(拓扑)空间. 此外, 如果对于一个开集 $A\subset X$, $[A]$ 也是 X 的开集时, 则等价关系~称为**是开的**.

现先给出两个有关的拓扑命题.

引理 1 X 上等价关系~是开的, 当且仅当自然射影 π 是一个开映射. 如果 π 是开映射且 X 具有可数基, 则 $X/\sim$ 也具有可数基.

证明 设 $A\subset X$ 为开集. $[A]=\pi^{-1}(\pi(A))$. 如果等价关系~是开的, 则 $[A]$ 也是 X 的开集. 由商拓扑的定义, $\pi(A)\subset X/\sim$ 也是开集, 即 π 为开映射. 反之, 若 π 为开映射, 则 $\pi(A)$ 为 $X/\sim$ 的开子集, 因为 π 是连续映射, 故 $\pi^{-1}(\pi(A))=[A]$ 为 X 的开集, 即~是开的.

设 π 是开映射, 且 X 具有可数基 $\{U_i\}_{i\in Z}$. 若 W 为 $X/\sim$ 的开集, 则 $\pi^{-1}(W)=\bigcup\limits_{j\in J}U_j$ 这里 $J\subset \boldsymbol{Z}$, 且 $W=\bigcup\limits_{j\in J}\pi(U_j)$, 从而 $\{\pi(U_i)\}_{i\in Z}$ 为 $X/\sim$ 的可数基. ▌

引理 2 设~是拓扑空间 X 上的开等价关系. 若 $S=\{(x, y)\,|\,x\sim y\}$ 为 $X\times X$ 的开子集, 则高空间 $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间.

证明 因为 S 为闭集, $(X\times X)-S$ 为开集. 设 $\pi(x)$ 和 $\pi(y)$ 为 $X/\sim$ 中两个不同点, 即 x, y 不等价, $(x, y)\in(X\times X)-S$. 故存在 $X\times X$ 中开集 $\tilde{U}\times\tilde{V}$, 使得 $(x, y)\in\tilde{U}\times\tilde{V}\subset(X\times X)-S$. 于是 $U=\pi(\tilde{U})$ 和 $V=\pi(\tilde{V})$ 是不相交的. 因为~是开的, 根据引理 1, π 是开映射. 故 U 和 V 为 $X/\sim$ 中开集, 因此 $X/\sim$ 为 Hausdorff 空间. ▌

例 5 实射影空间 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$.

令 $X=\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$, 即 X 为除去 $0=(0,\cdots,0)$ 外的 $(m+1)$-实数组 $x=(x^1, \cdots, x^{m+1})$ 的全体. 在 X 中定义一个等价关系~: 如

果存在一个实数 $t\neq 0$，使得 $y=tx$，即

$$(y^1, \cdots, y^{m+1})=(tx^1, \cdots, tx^{m+1}),$$

则 $y\sim x$. 等价类 $[x]$ 可以看作为 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中过原点的直线. 用 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ 表示商空间 $X/\sim$，它称为实射影空间. 以下来证明 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ 是一个 m 维的 C^∞ 微分流形.

先证 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ 具有可数基. 设 t 是非零实数. 作映射 $\varphi_t: X\to X$，$\varphi_t(x)=tx$. 显然 φ_t 为同胚，且 $(\varphi_t)^{-1}=\varphi_{1/t}$. 于是 $\varphi_t(t\neq 0)$ 均为开映射，故若 $U\subset X$ 为开集，则 $[U]=\bigcup\limits_{t\neq 0}\varphi_t(U)$ 也为 X 中的开集，即等价关系 $\sim$ 是开的. 因为 X 是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 的开子流形，具有可数基，故由引理 1，$\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})=X/\sim$ 具有可数基.

再证 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ 是 Hausdorff 空间. 在开子流形 $X\times X\subset \boldsymbol{R}^{m+1}\times\boldsymbol{R}^{m+1}$ 上定义实值函数 $f: X\times X\to\boldsymbol{R}$，

$$f(x^1, \cdots, x^{m+1}, y^1, \cdots, y^{m+1})=\sum_{i,j=1}^{m}(x^iy^j-x^jy^i)^2.$$

显然，$f(x, y)$ 是连续的，且 $f(x, y)=0$ 当且仅当 $x\sim y$. 因此 $S=\{(x, y)\,|\,x\sim y\}=f^{-1}(0)$ 为 $X\times X$ 的闭子集. 根据引理 2，$\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$ 是 Hausdorff 空间.

最后定义 $m+1$ 个坐标图 (U_i, φ_i)，$1\leqslant i\leqslant m+1$. 令

$$\tilde{U}_i=\{x\,|\,x\in X,\ x^i\neq 0\},\qquad U_i=\pi(\tilde{U}_i),$$

映射 $\varphi_i: U_i\to\boldsymbol{R}^m$ 定义为对于 $[x]\in U_i$ 的任意代表 $x=(x^1,\cdots,x^{m+1})$ 有

$$\varphi_i(x)=\left(\frac{x^1}{x^i}, \cdots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \cdots, \frac{x^{m+1}}{x^i}\right).$$

由此，如果 $x\sim y$，则 $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$. 反之，若 $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$，则 $\frac{y^p}{x^p}=\frac{y^i}{x^i}(p=1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, m+1)$，即 $y\sim x$. 因此，映射 $\varphi_i: U_i\to\boldsymbol{R}^m$ 是完全确定的、连续的、单的和满的，并且

$$\varphi_i^{-1}(z^1, \cdots, z^m)=[(z^1, \cdots, z^{i-1}, 1, z^i, \cdots, z^m)],$$

故 $\varphi_i^{-1}:\boldsymbol{R}^m\to U_i$ 是 C^∞ 映射，$\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^{m+1}$，$(z^1,\cdots,z^m)\mapsto(z^1,\cdots,z^{i-1},1,z^i,\cdots,z^m)$ 和 π 的复合，它是连续的，且 $\bigcup_{i=1}^{m+1}U_i\supset\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$。下面再证明坐标图$(U_i,\varphi_i)$是 C^∞ 相容的．改写

$$\varphi_i([x])=({}_i\xi^1,\cdots,{}_i\xi^{i-1},{}_i\xi^{i+1},\cdots,{}_i\xi^{m+1}),$$

其中
$$ {}_i\xi^j=\frac{x^j}{x^i},\quad (j\neq i),$$

则在 $U_i\cap U_j(j\neq i)$上有下述 C^∞ 坐标变换

$$\begin{cases} {}_j\xi^h=\dfrac{{}_i\xi^h}{{}_i\xi^j}, & (h\neq i,\ j); \\ {}_j\xi^i=\dfrac{1}{{}_i\xi^j}. \end{cases}$$

由以上证明，可知 $\boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{R})$是 m 维 C^∞ 微分流形。

例 6 Grassmann 流形

$\boldsymbol{R}^m$ 作为一个 m 维向量空间，它的 k-标架是其内 k 个线性无关的向量的集合 $X=(x_1,\cdots,x_k)$，

$$x_1=(x_1^1,\cdots,x_1^m),\ \cdots,\ x_k=(x_k^1,\cdots,x_k^m).$$

$\boldsymbol{R}^m$ 中一个 k-标架 X 可以等同于 $\boldsymbol{R}$ 上秩为 k 的一个 $k\times m$ 矩阵，仍用 X 来表示．它的行向量为 $x_1,\cdots,x_k$．$k\times m$ 的实矩阵全体 $\mu_{km}(\boldsymbol{R})$是 C^ω 微分流形，而对应于 k-标架的矩阵的秩等于 k，其全体所成的集合是 $\mu_{km}(\boldsymbol{R})$的开子集．因此，它是一个 C^ω 微分流形．记成 $F(k,m)$．

显然，$F(k,m)$的一个点，即 k-标架决定 $\boldsymbol{R}^m$ 中一个 k 平面．即由 $x_1,\cdots,x_k$ 张成的子空间．并且两个 k 标架 $X=(x_1,\cdots,x_k)$ 和 $Y=(y_1,\cdots,y_k)$确定同一个 k 平面当且仅当 $Y=AX$，$A\in GL(k,\boldsymbol{R})$，即

$$y_i=\sum_j a_{ij}x_j,\quad \det(a_{ij})\neq 0,\quad (i,\ j=1,\cdots,k).$$

在 $F(k,m)$中定义等价关系 $\sim$：

$$Y \sim X, \quad 若 \quad Y = AX, \quad A \in GL(k, \mathbf{R}),$$

且令
$$G(k, m) = F(k, m)/\sim.$$

自然射影
$$\pi: F(k, m) \to G(k, m).$$

使用 $\varphi_A: F(k, m) \to F(k, m)$ 为由 $\varphi_A(X) = AX$ 定义的映射，这里 $A \in GL(k, \mathbf{R})$. 仿例5所作，可以证明 $G(k, m)$ 具有可数基，且 π 为开映射.

在 $F(k,m) \times F(k,m)$ 上定义实值函数 $f: F(k,m) \times F(k,m) \to \mathbf{R}$:

$$f(X, Y) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i_1, \cdots, i_{k+1}=1}^{m} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_1^{i_{k+1}} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_k^{i_1} & \cdots & x_k^{i_{k+1}} \\ y_l^{i_1} & \cdots & y_l^{i_{k+1}} \end{vmatrix}^2,$$

$f=0$ 当且仅当 $X \sim Y$. 于是 $S = \{(X, Y) \mid X \sim Y\} = f^{-1}(0)$ 为 $F(k, m) \times F(k, m)$ 的闭子集. $G(k, m)$ 为 Hausdorff 空间.

最后给出 $G(k, m)$ 上 C^∞ 相容的坐标图组成的开覆盖. 令 $J = (j_1, \cdots, j_k)$ 是 $(1, \cdots, m)$ 的一个有序子集，J' 为其有序余子集. 例如 $J = (1, \cdots, k)$，则 $J' = (k+1, \cdots, m)$. 用 X_J 表示 $k \times m$ 矩阵 X 的 $k \times k$ 子矩阵 $(x_i^{j_l})$，$1 \leqslant i, l \leqslant k$; $X_{J'}$ 表示 X 除去 $j_1, \cdots, j_k$ 列后得到的 $k \times (m-k)$ 余子矩阵. 记

$$\tilde{U}_J = \{X_J \in F(k, m) \mid \det X_J \neq 0\}, \quad U_J = \pi(\tilde{U}_J),$$

则 U_J 为 $G(k, m)$ 的开子集，而每一个 $Y \in \tilde{U}_J$ 等价于 $k \times m$ 矩阵 $X^* = (Y_J)^{-1} X$. X^* 的子矩阵 X_J^* 为 $k \times k$ 单位矩阵. 例如 $Y \in \tilde{U}_{(1, \cdots, k)}$，则 Y 等价于下面形式的一个矩阵

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^m \\ & \ddots & & & \cdots & \\ 0 & & 1 & x_k^{k+1} & \cdots & x_k^m \end{pmatrix}.$$

再定义映射 $\varphi_J: U_J \to \mu_{k(m-k)}(\mathbf{R})$ 如下:

$$\varphi_J([Y]) = X_{J'}^*.$$

不难证明，φ_J 是完全确定的，且为同胚映射．对于$(1, \cdots, m)$的 k 个不同元素的有序子集 J 的全体，$\{(U_J, \varphi_J)\}$组成了 $G(k, m)$的 C^∞ 相容的坐标图册．这样，我们证明了 $G(k, m)$为 $k(m-k)$维 C^∞ 微分流形，称为 Grassmann 流形．

1.3 流形的映射

我们先将 $\boldsymbol{R}^m$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集之间映射的可微性质及秩的定义推广到 C^k 流形间的映射上．

定义 2.1.4 设 M 为 m 维 C^k 流形．$W\subset M$ 是开子集．$f: W\to\boldsymbol{R}$ 为实值函数．如果对于 $p\in W$，存在一个包含 p 点的坐标图(U, φ)，$U\cap W\neq\varnothing$，使得函数

$$f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap W)(\subset\boldsymbol{R}^m)\to\boldsymbol{R}$$

在 $\varphi(p)$点是 $C^s(s\leqslant k)$的，则称 $f:W\to\boldsymbol{R}$ 在 p 点是 C^s 的．如果对每一点 $p\in W$，f 都是 C^s 的，则称 $f:W\to\boldsymbol{R}$ 为在 W 上的 C^s 函数．W 上 C^s 函数的全体用 $C^s(W)$表示．特别，$C^s(M)$表示 M 上所有的 C^s 函数．

函数 $f:W\to\boldsymbol{R}$ 在 $p\in W$ 为 C^s 这一性质与坐标图的选取无关．事实上，设(V, ψ)是包含 p 点的另一个坐标图，则

$$f\circ\varphi^{-1}=(f\circ\psi^{-1})\circ\psi\circ\varphi^{-1}.$$

因为 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个开子集的 C^k 微分同胚，故 $f\circ\varphi^{-1}$ 和 $f\circ\psi^{-1}$ 都是 C^s 的$(s\leqslant k)$．

设(U, φ)为 m 维 C^k 流形的一个坐标图，坐标函数 $x^i=u^i\circ\varphi$ 是 U 上的 C^k 函数．

定义 2.1.5 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形．如果映射 $f:M\to N$ 对于一点 $p\in M$，存在 M 上包含 p 的坐标图(U, φ)和 N 上包含 $q=f(p)$的坐标图(V, ψ)，使得映射(图 2)

$$\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)(\subset\boldsymbol{R}^m)\to\psi(V)(\subset\boldsymbol{R}^n)$$

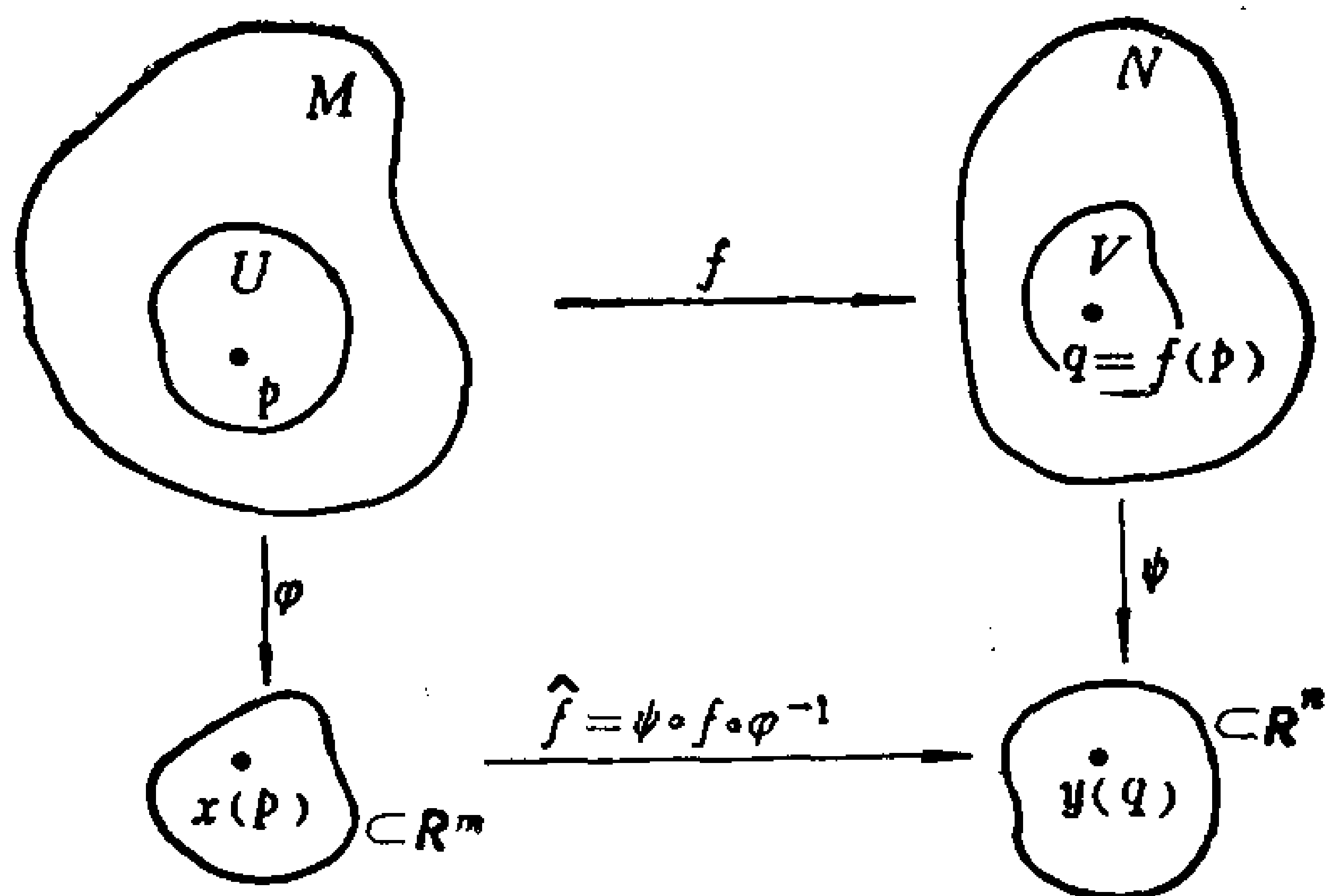


图 2

在 $\varphi(p)$ 点是 $C^s(s\leqslant k)$ 的，则称映射 $f:M\to N$ 在 p 点是 C^s 的. 如果 $f:M\to N$ 在 M 的每一点都是 C^s 的，则称 f 为 C^s 映射.

$\hat{f}$ 的坐标表示为

$$(y^1,\ \cdots,\ y^n)=(f^1(x),\ \cdots,\ f^n(x)),$$

$$x=(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\varphi(U), \tag{2.1.2}$$

其中

$$f^\alpha(x)=\pi^\alpha\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x),\quad \alpha=1,\ \cdots,\ n. \tag{2.1.3}$$

当 $f:M\to N$ 为 C^s 映射时，f^1, $\cdots$, f^n 均为 $\boldsymbol{R}^m$ 上的开集 $\varphi(U)$ 上的 C^s 函数. 显然，如果 $W\subset M$ 为开集，且 $f:M\to N$ 为 C^s 函数，则 $f|_W:W\to N$ 是 C^s 映射; 反之，若对于 M 的任一个开集 V，$f|_V:V\to N$ 是 C^s 映射，则 $f:M\to N$ 为 C^s 映射. 此外，定义 2.1.4 是定义 2.1.5 中当 $N=\boldsymbol{R}$ 时的特殊情况.

例 设 $M=(a,\ b)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的开区间，N 为 n 维 C^k 流形. $C^s(s\leqslant k)$ 映射 $f:(a,\ b)\to N$ 称为流形 N 上的一条 C^s（参数）曲线.

定义 2.1.6 设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维 C^k 流形，$f:M\to N$ 在 $p\in M$ 点是 $C^s(s\leqslant k)$ 的. $(U,\ \varphi)$、$(V,\ \psi)$ 分别是包含 p 和 $f(p)$ 的坐标图，映射 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 在 $\varphi(p)$ 的秩称

为映射 f 在 p 点的秩.

仿定义 2.1.4 所作，可知映射 f 在 p 点的秩是与坐标图 (U, φ)、(V, ψ) 的选取无关.

利用局部坐标，由(2.1.2)式可知，f 在 p 点的秩是映射 $\hat{f}$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

在点 $\varphi(p)$ 的秩.

利用以上所述，相应于第一章 §1 中关于 C^k 函数的定理以及秩定理，如今有

定理 2.1.1 设 M 是 C^k 流形，F 和 K 分别是 M 的闭子集和紧致子集，$F\cap K=\varnothing$，则存在 M 上的一个 C^k 函数，它在 K 上的值为 1，在 F 上的值恒为零.

推论 设 U 为 C^k 流形 M 上的开集，f 是 U 上的 C^s 函数 $(s\leqslant k)$，则对任意的 $p\in U$，存在 p 的一个邻域 $V\subset U$ 和 M 上的一个 C^s 函数 f^*，使得在 V 上 $f^*=f$，且在 U 外 $f^*=0$.

定理 2.1.2 设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维 C^k 流形. $f: M\to N$ 为 $C^s(1\leqslant s\leqslant k)$ 映射. 如果 f 在点 $p\in M$ 的一个邻域内的秩为 r，则存在 M 上包含 p 的坐标图 $(U, \varphi; x^i)$ 和 N 上包含 $q=f(p)$ 的坐标图 $(V, \psi; y^\alpha)$，使得

$$\varphi(p)=(0, \cdots, 0), \quad \psi(f(p))=(0, \cdots, 0),$$

且

$$\hat{f}(x^1, \cdots, x^m)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^m)=(x^1, \cdots, x^r, \overbrace{0, \cdots, 0}^{(n-r)\text{个}}),$$

即

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1\cdots x^m)=\begin{cases} x^\alpha, & \alpha=1, \cdots, r, \\ 0, & \alpha=r+1, \cdots, n. \end{cases}$$

上述定理中，可设 $\varphi(U)=C_\varepsilon^m(0)$，$\psi(V)=C_\varepsilon^n(0)$ 或 $\varphi(U)=B_\varepsilon^m(0)$，$\psi(V)=B_\varepsilon^n(0)$.

定义 2.1.7 若 $f:M\to N$ 为双射，且 f 和 f^{-1} 都是连续的，则称 f 为同胚. 若 $f:M\to N$ 为同胚，且 f 和 f^{-1} 都是 C^s 映射，则称 f 为 C^s 微分同胚，且称 M 和 N 是 C^s 微分同胚的.

例　设 (U,φ) 是 m 维 C^k 流形 M 的一个坐标图，则 $\varphi:U\to\varphi(U)(\subset\boldsymbol{R}^m)$ 为 C^k 微分同胚.

在本节 1.1 的最后一个例子中，$(\boldsymbol{R},\varphi)$ 和 $(\boldsymbol{R},\varphi^*)$ 给出两个 C^∞ 微分流形. 为明确起见，现将这两个微分流形分别记成 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$. 再考虑映射

$$F:\boldsymbol{R}_1\to\boldsymbol{R}_2,\quad x\mapsto x^{1/3},$$

于是有

$$\hat{F}(x)=\varphi^*\circ F\circ\varphi^{-1}(x)=x,\quad \hat{F}^{-1}(x)=\varphi\circ F^{-1}\circ\varphi^*(x)=x$$

均为 C^∞ 函数，故 $F:\boldsymbol{R}_1\to\boldsymbol{R}_2$ 是 C^∞ 微分同胚.

以上两个 C^∞ 流形 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 具有相同的支承拓扑流形 $\boldsymbol{R}$，它们的 C^∞ 微分结构不是 $C^k(k>1)$ 相容的，但他们是 C^∞ 微分同胚的. 一个自然的问题是，同一拓扑流形上可否有两个微分结构，使得由它们得出的微分流形不是微分同胚的？这是微分流形理论中的一个基本问题. J. Milnor 在 1956 年对这一问题给出了肯定的回答，他证明了在 S^7 上至少存在两个这样的微分结构[参阅 J. W. Milnor, Ann. of Math., 64(1956), 399—405].

1.4 浸入与淹没　子流形

定义 2.1.8 设 M 和 N 都是 C^k 流形，$f:M\to N$ 是 $C^s(1\leqslant s\leqslant k)$ 映射. 如果 f 在点 $p\in M$ 的秩等于 M 的维数 m，则称映射 f 在 p 点为浸入，如果 f 在 M 的每一点都是浸入，则称 f 是浸入.

如果 f 在点 $p\in M$ 的秩等于 N 的维数 n，则称映射 f 在 p 点为淹没，如果 f 在 M 的每一点都是淹没，则称 f 是淹没.

由定义可知，若 f 为浸入，则 $m\leqslant n$；若 f 为淹没，则 $m\geqslant n$.

例 1 设 $U\subset \boldsymbol{R}^m$ 是开子集，$\alpha: U\to \boldsymbol{R}^n\ (n>m)$ 定义为

$$\alpha(x^1, \cdots, x^m)=(x^1, \cdots, x^m, \overbrace{0, \cdots, 0}^{(n-m)\text{个}}),$$

则映射 α 是浸入，称为典型浸入.

设 $\beta: U\to \boldsymbol{R}^k\ (k<m)$ 定义为

$$\beta(x^1, \cdots, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^m)=(x^1, \cdots, x^k),$$

则映射 β 是淹没，称为典型淹没.

例 2 设 $f: \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ 定义为

$$f(t)=\left(2\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$g: \boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ 定义为

$$g(t)=\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\operatorname{tg}^{-1}t\right),\ \sin 2\left(\frac{\pi}{2}+2\operatorname{tg}^{-1}t\right)\right).$$

容易验证映射 f 和 g 均为浸入(图 3).

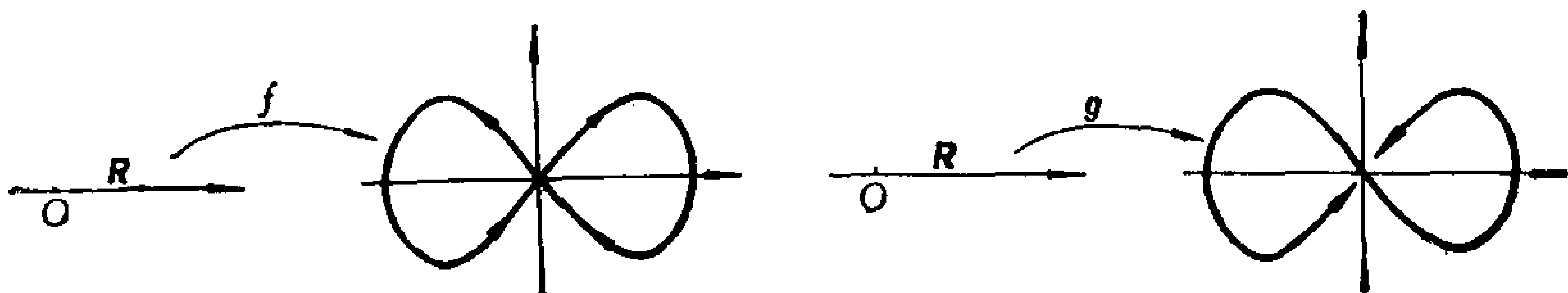


图 3

例 3 设 $f: \boldsymbol{R}^m-\{0\}\to \boldsymbol{R}$ 定义为

$$f(x^1, \cdots, x^m)=\sum_{i=1}^{m}(x^i)^2,$$

此时映射 f 在 $\boldsymbol{R}^m-\{0\}$ 的所有点处秩为 1，所以映射 f 为淹没.

由浸入和映射秩的定义，利用定理 2.1.2 可知，如果 f 在 $p\in M$ 点是浸入，则 f 在 p 点的某一邻域上是浸入，且存在 M 中

含 p 的坐标图$(U, \varphi; x^i)$和 N 中含 $q=f(p)$的坐标图$(V, \psi; y^\alpha)$，使得$f(U)\subset V$，$\varphi(p)=0(\in \boldsymbol{R}^m)$，$\psi(q)=0(\in \boldsymbol{R}^n)$，且$f$ 的局部表示 $\hat{f}\equiv\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$具有如下形式:

$$\hat{f}(x^1, \cdots, x^m)=(x^1, \cdots, x^m, \overbrace{0, \cdots, 0}^{(n-m)个}).$$

于是，浸入映射局部地是单射．但值得注意的是，就整体而言，它可能不是单射．例如上述例 2 中的映射f，因为$f(k\pi)=(0, 0)$，$k=0, \pm1, \cdots$，故f 整体就不是单射．我们以后主要考虑单浸入，即它既是浸入，又是单射．

定义 2.1.9 设 N' 和 N 都是 C^k 微分流形，$N'\subset N$．如果包含映射 $i:N'\to N$ 是浸入，则称 N' 是 N 的浸入子流形．

若$f:M\to N$ 是单浸入，这时通过f，M 的流形结构(包括拓扑结构和微分结构)自然导出它的象集 $f(M)$上的一个流形结构．具体地说，$f(M)$的拓扑结构定义为：Q 是 $f(M)$的开子集，当且仅当 $f^{-1}(Q)$是 M 的开子集．若 $\mathscr{U}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$是 M 的 C^k 坐标图册，不难看出 $f(\mathscr{U})\equiv\{(f(U_\alpha), \varphi_\alpha\circ f^{-1})\}$是 $f(M)$上的一个 C^k 坐标图册，它唯一地决定$f(M)$上的一个微分结构．这样，$f(M)$就成为 C^k 微分流形．以后我们把$f(M)$上的这个流形结构称为由f 导出的流形结构．显然，这时$f:M\to f(M)$是微分同胚．由于f是浸入，可见包含映射 $i:f(M)\to N$ 也是浸入，$f(M)\subset N$，因此 $f(M)$是 N 的浸入子流形，它具有由f 导出的流形结构．

应该指出，若 N' 是 N 的浸入子流形，一般来说，N' 上的流形拓扑与它作为 N 的子空间的(相对)拓扑不一定一致．例如，前面例 2 中 $g(\boldsymbol{R})$是 $\boldsymbol{R}$ 中的浸入子流形，但是 $g(\boldsymbol{R})$上由 g 得出的流形拓扑就不是它作为 $\boldsymbol{R}$ 的子空间的拓扑．下面给出一个更典型的例子．

例 4 设 $T=S^1\times S^1=\{(z_1, z_2)\in \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C} \mid |z_1|=|z_2|=1\}$，定

义 $f:\mathbf{R}\to T$ 如下：

$$f(t)=(e^{2\pi it},\ e^{2\pi i\alpha t}),$$

其中 α 是一无理数．我们可以证明 $f(\mathbf{R})$ 是 T 的浸入子流形，但 $f(\mathbf{R})$ 上的流形拓扑不是作为 T^2 的子空间的拓扑．

令 $\varphi:\mathbf{R}^2\to S^1\times S^1$，使得

$$\varphi(u^1,\ u^2)=(e^{2\pi iu^1},\ e^{2\pi iu^2}).$$

在 $\mathbf{R}^2$ 上定义等价关系“～”如下：

$$(u^1,\ u^2)\sim(v^1,\ v^2)\Leftrightarrow v^1=u^1+k_1,\ v^2=u^2+k_2,$$

$$(k_1,\ k_2\ \text{为整数}).$$

这时，φ 导出商空间 $\mathbf{R}^2/\sim$ 到 $S^1\times S^1$ 上的一个同胚，映射 φ 把 $\mathbf{R}^2$ 中每个边长为 1 的正方形映成 $S^1\times S^1$，并且 φ 限制在这样的正方形的内部是它到 $S^1\times S^1$ 的开子集的同胚(图 4)．

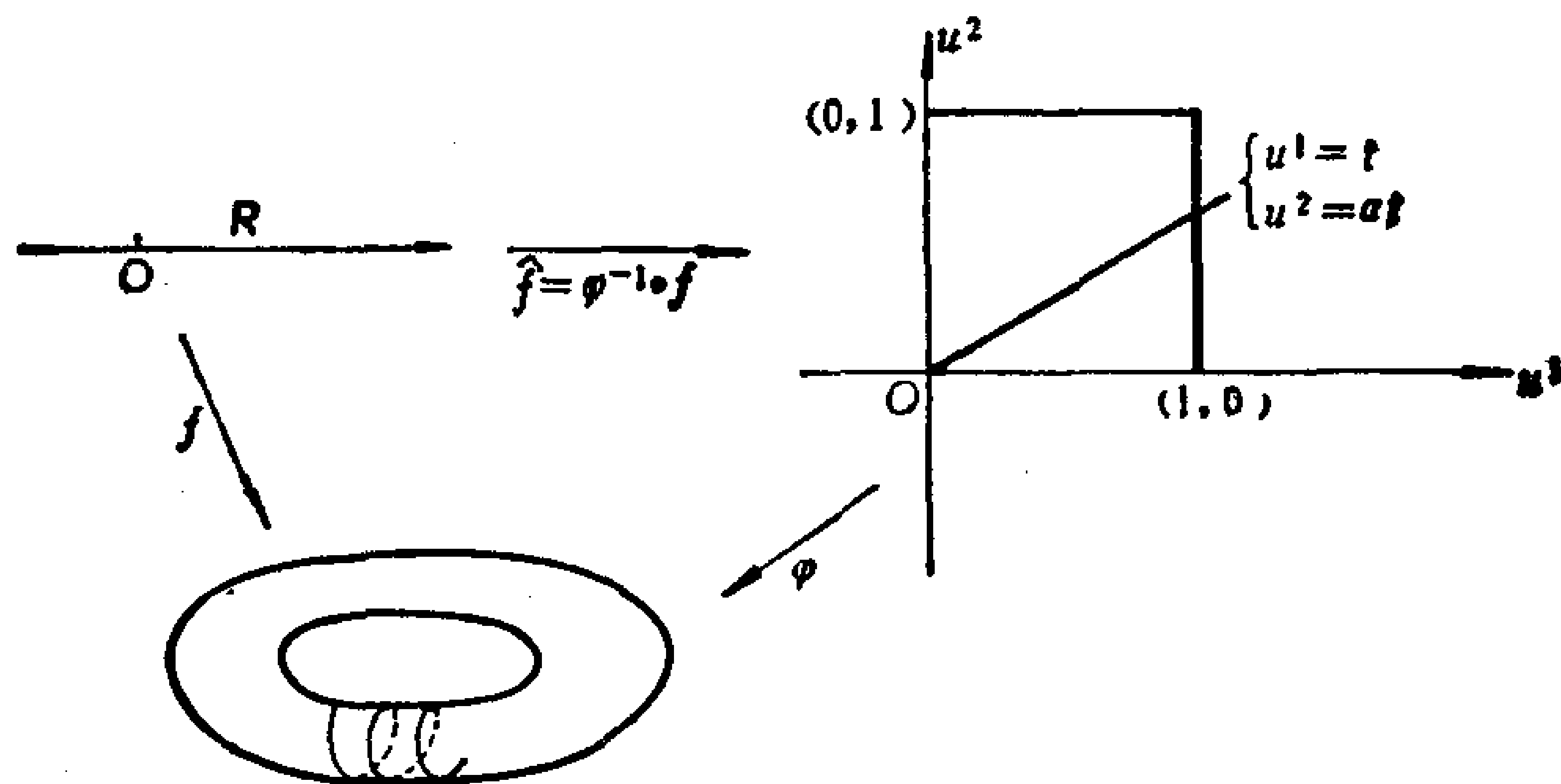


图 4

设 $t_0\in\mathbf{R}$ 是任意一点，$f(t_0)=(\xi,\ \eta)$．取 $(u_0^1,\ u_0^2)\in\mathbf{R}^2$，使 $\varphi(u_0^1,\ u_0^2)=(\xi,\ \eta)$．令

$$W=\left(u_0^1-\frac{1}{2},\ u_0^1+\frac{1}{2}\right)\times\left(u_0^2-\frac{1}{2},\ u_0^2+\frac{1}{2}\right),$$

于是 $(\varphi(W),\ \varphi^{-1})$ 是 $T^2=S^1\times S^1$ 的含 $f(t_0)$ 的坐标图．取 $\mathbf{R}$ 中 t_0 的邻域 U，使得 $f(U)\subset\varphi(W)$．这时，f 的局部表示 $\hat{f}=\varphi^{-1}\circ f$: $U\to W$ 具有形式

$$\hat{f}(t)=(t,\ \alpha t),$$

从而 $D\hat{f}(t_0)=(1,\ \alpha)$. 故 f 在 t_0 是浸入. 由 t_0 的任意性, 可知 f 是浸入.

下面我们验证 f 是单射. 事实上, 若 $t_2\neq t_1$ 使得 $f(t_2)=f(t_1)$, 即有

$$(e^{2\pi it_2},\ e^{2\pi i\alpha t_2})=(e^{2\pi it_1},\ e^{2\pi i\alpha t_1}),$$

于是 $t_2-t_1=k$, $\alpha t_2-\alpha t_1=l$, 其中 k、l 为整数. 因为 $t_2-t_1\neq 0$, 所以 $\alpha=l/k$, 这是一个有理数, 与假设矛盾, 故 f 是单射. 于是 $f(\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{T}^2$ 的浸入子流形.

然而, 我们可以证明 $f(\boldsymbol{R})$ 在 $T^2=S^1\times S^1$ 是稠密的, 从而表明 $f(\boldsymbol{R})$ 上由 f 导出的流形拓扑不是它作为 T 中的子空间的拓扑. 事实上, 注意到 $f(\boldsymbol{R})$ 的 φ 逆象是直线族

$$\begin{cases}u^1=k+t,\\ u^2=l+\alpha t,\end{cases}\qquad (k,\ l \text{ 为整数})$$

由 Kronecker 逼近定理可知, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, u, $v\in\boldsymbol{R}$, 必存在 $t\in\boldsymbol{R}$ 以及整数 k, l, 使得

$$|u-t-k|<\varepsilon,\qquad |v-\alpha t-l|<\varepsilon.$$

由此可见, 上述直线族在 $\boldsymbol{R}^2$ 中稠密, 因而 $f(\boldsymbol{R})$ 在 $\boldsymbol{T}^2=S^1\times S^1$ 也是稠密的.

下面我们给出一类与包含它的微分流形之间有较简单关系的子流形.

定义 2.1.10 设 $N'\subset N$ 是 n 维 C^k 流形 N 的子集, 它具有子空间的拓扑, 对某个自然数 $m(\leqslant n)$, 如果每点 $q\in N'$, 都有 N 包含 q 的坐标图 $(V,\ \psi;\ y^\alpha)$, 使得

(i) $\psi(q)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的原点 0;

(ii) $\psi(V\cap N')=\{(y^1,\cdots,\ y^n)\in\psi(V)\mid y^{m+1}=\cdots=y^n=0\}$,

则称 N' 是 N 的 m 维**正则子流形**. 具有上述性质(i)、(ii)的坐

标图(V, ψ)称为 N 含 $q\in N'$ 的**子流形图**(图5). 而 $n-m$ 称为 N' 在 N 中的**余维数**.

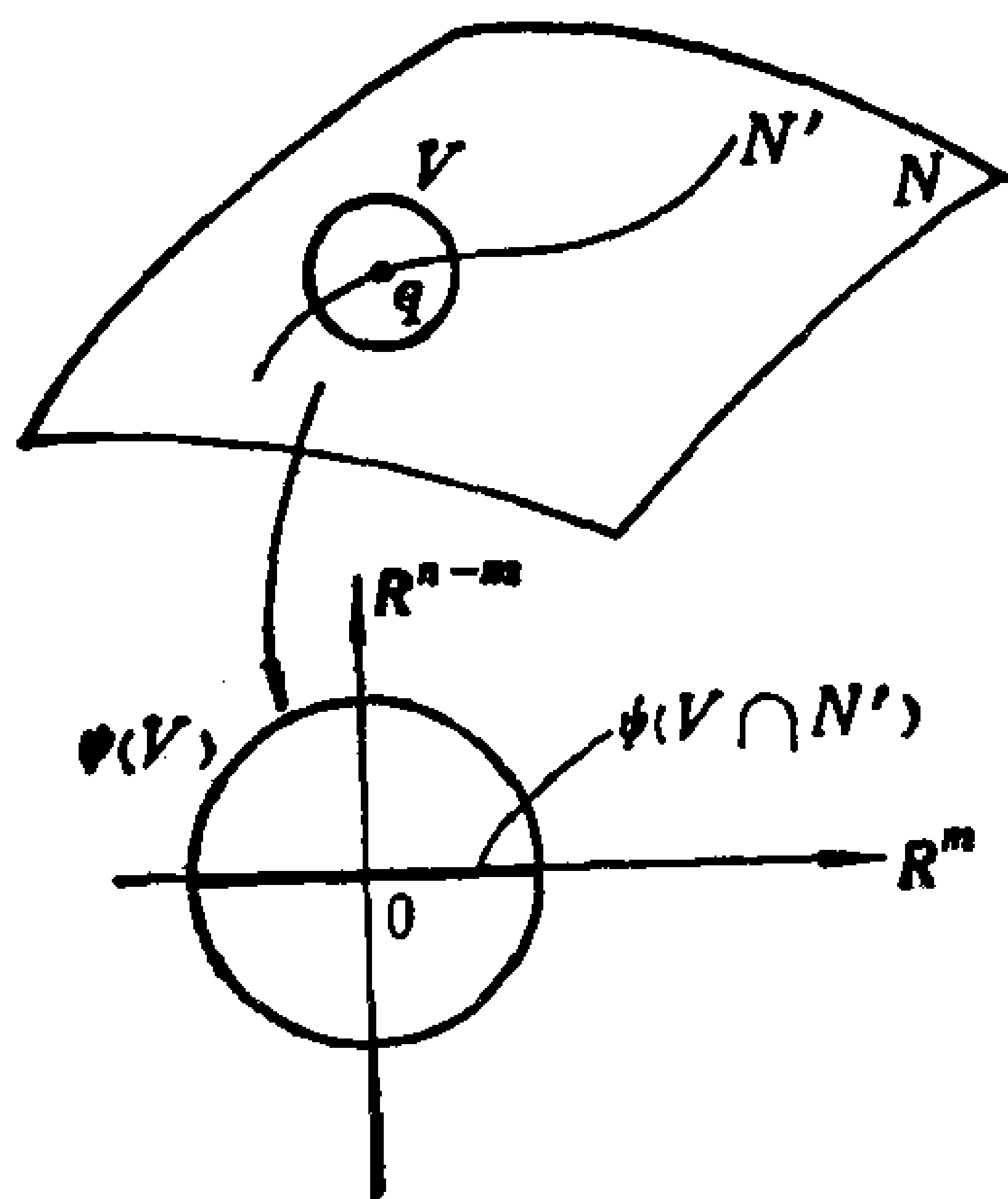


图 5

设 N' 是 N 的 m 维正则子流形, N' 有一个由 N 的微分结构所自然导出的微分结构. 事实上, 设 $\mathscr{A}=\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$是 N 上全体子流形图所成的集合. 记 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{(\widetilde{V}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)\}$, 其中 $\widetilde{V}_\alpha=V_\alpha\cap N'$, $\widetilde{\varphi}_\alpha=\pi\circ(\psi_\alpha|_{\widetilde{V}_\alpha})$, $\pi:\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^{n-m}\to\boldsymbol{R}^m$, $(y^1, \cdots, y^m, y^{m+1}, \cdots, y^n)\mapsto(y^1, \cdots, y^m)$. 容易验证, $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是 N' 的一个 C^k 坐标图册. 它唯一决定 N' 上的微分结构. 以后谈到正则子流形, 我们总认为它具有上面所述的微分结构.

例 5 微分流形的开子流形是正则子流形.

例 6 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的 C^k 流形, $f:M\to N$ 是 C^s 映射$(1\leqslant s\leqslant k)$, 则 f 的图形

$$\mathrm{gr}(f)=\{(p, f(p))\in M\times N\,|\,p\in M\}$$

是积流形 $M\times N$ 的 m 维正则子流形.

证明 设 $p\in M$ 为任意一点, $q=f(p)$. $(U, \varphi; x^i)$, $(V, \psi; y^\alpha)$分别为 M 中含 p 及 N 中含 q 的坐标图, 使 $f(U)\subset V$, $\varphi(p)=0\in\boldsymbol{R}^m$, $\psi(q)=0\in\boldsymbol{R}^n$. 这时, 局部表示 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 满足 $\hat{f}(0)=0$, 且

$$\begin{aligned}&(\varphi\times\psi)\{(U\times V)\cap\mathrm{gr}(f)\}\\&\quad=\{(x, \hat{f}(x))\in\varphi(U)\times\psi(V)\,|\,x\in\varphi(U)\}.\end{aligned}$$

定义映射 $G:\varphi(U)\times\psi(V)\to\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{m+n}$, 使得

$$G(x, y)=(x, y-\hat{f}(x)).$$

容易验证 $G(0,0)=(0,0)$，并且 G 在 $(0,0)$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D\hat{f}(0) & I_n \end{pmatrix}$$

非奇异. 由反函数定理，存在 $\varphi(U)\times\psi(V)$ 的一个包含 $(0,0)$ 的邻域 $\tilde{U}$，使 $G:\tilde{U}\to G(\tilde{U})$ 为微分同胚. 设 $G(\tilde{U})=V_1\times V_2$，其中 V_1, V_2 分别为 $\boldsymbol{R}^m$ 和 $\boldsymbol{R}^n$ 中包含原点的邻域. 记

$$W=(\varphi\times\psi)^{-1}(\tilde{U}),\qquad \chi=G\circ(\varphi\times\psi)|_W.$$

于是 (W,χ) 是 $M\times N$ 中含 $(p,f(p))$ 的子流形图. 事实上，$\chi(p,f(p))=(0,0)$，且

$$\chi(W\cap\mathrm{gr}(f))=\{(x,y)\in\chi(W)\,|\,y=0\}.$$

于是 $\mathrm{gr}(f)$ 是 $M\times N$ 中 m 维正则子流形.

为了弄清浸入子流形和正则子流形的关系，我们引入下面的概念.

定义 2.1.11 设 $f:M\to N$ 是单浸入，如果对于 $f(M)\subset N$ 的子空间拓扑，$f:M\to f(M)$ 是同胚，则称 f 为**嵌入**，$f(M)$ 称为 N 的**嵌入子流形**.

定理 2.1.3 设 $f:M\to N$ 是单浸入，则 $f(M)$ 是 N 的正则子流形的充要条件为 f 是嵌入. 这时，$f:M\to f(M)$ 是微分同胚.

证明 设 $f(M)$ 是 N 的正则子流形，对于 $q=f(p)$，存在 N 中含 q 的子流形图 $(V,\psi;y^\alpha)$. 由于 $f:M\to N$ 是连续的，故可取 M 中包含 p 的坐标图 $(U,\varphi;x^i)$，使得 $f(U)\subset V$. 于是对于 $f(M)\subset N$ 的子空间拓扑，$f:M\to f(M)$ 是连续的. 下面再证 $f^{-1}:f(M)\to M$ 是连续的. 设 $(U,\varphi;x^i)$ 是 M 中包含 p 的任一坐标图，$(V,\psi;y^\alpha)$ 是 N 中包含 $q=f(p)$ 的子流形图. 由子流形图的性质 ii)，$f|_U$ 的局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m), & i=1,\cdots,m; \\ y^\lambda=0, & \lambda=m+1,\cdots,n. \end{cases}$$

由于 f 的秩等于 M 的维数，故 $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)\neq 0 \quad (i,\ j=1,\ \cdots,\ m)$.
根据反函数定理，存在充分小的 $\delta>0$，可使

$$x^i=y^i(y^1,\ \cdots,\ y^m), \qquad |y^i|<\delta,\ i=1,\ \cdots,\ m.$$

这就表示存在 q 的一个充分小邻域 V_1，使 $f^{-1}(f(M)\cap V_1)\subset U$.
于是 f^{-1} 连续．故 $f:M\to f(M)$ 为同胚，即 f 是嵌入．由上面讨论可知，若 f 是 C^s 的，则 f^{-1} 也是 C^s 的，故 f 是 C^s 微分同胚.

以下证明，若 f 为嵌入，则 $f(M)$ 是 N 的正则子流形．设 $q\in f(M)$ 是任意一点，$p\in M$ 使得 $f(p)=q$．利用秩定理 2.1.2，可取 M 含 p 的坐标图 $(U,\varphi;x^i)$ 及 N 含 $f(p)=q$ 的坐标图 $(V,\psi;y^\alpha)$，使得 $\varphi(p)=0\in\boldsymbol{R}^m$，$\psi(q)=0\in\boldsymbol{R}^n$，$f(U)\subset V$，并且局部表示 $\hat{f}\equiv\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 具有形式

$$\hat{f}(x^1,\ \cdots,\ x^m)=(x^1,\ \cdots,\ x^m,\ \overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{(n-m)\text{个}}),$$
$$(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\varphi(U).$$

由于 $U\subset M$ 是开子集，$f:M\to f(M)$ 是同胚，其中 $f(M)$ 有作为 N 的子空间的拓扑，所以 $f(U)$ 是 $f(M)$ 的开子集．于是有 N 中的开子集 W_1，使得 $f(U)=W_1\cap f(M)$.

记 $W=V\cap W_1$，$\chi=\psi|_W$，则 $(W,\ \chi)$ 是 N 中含 q 的坐标图，其中 $\chi(q)=0\in\boldsymbol{R}^n$，并且有

$$\chi(W\cap f(M))=\{(y^1,\ \cdots,\ y^n)\in\chi(W)\,|\,y^{m+1}=\cdots=y^n=0\},$$

因此，$f(M)$ 是 N 的正则子流形．▌

由以上讨论可知，若 $f:M\to N$ 是一个浸入，则对任意点 $p\in M$，存在 M 中包含 p 的一个邻域，使得 $f|_U:U\to N$ 是单浸入，并且 $f:U\to f(U)$ 是同胚，这里 $f(U)$ 具有作为 N 的子空间的拓扑，故 $f|_U:U\to N$ 是嵌入．这就表明，从局部来考虑，浸入和嵌入可以不必区分.

命题 **2.1.4** 设 $f:M\to N$ 是单浸入，若 M 是紧致的，则 f 是

嵌入，从而 $f(M)$ 是正则子流形.

证明 $f(M)$ 作为 N 的拓扑子空间是 Hausdorff 空间，而 $f:M\to f(M)\subset N$ 是紧致空间到 Hausdorff 空间 $f(M)$ 的 1—1 连续映射. 由拓扑学可知，$f:M\to f(M)$ 为同胚，即 f 为嵌入. ∎

定理 2.1.5 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形，$f:M\to N$ 为 C^s 映射 $(1\leqslant s\leqslant k)$，其秩为 r. 那末，对于 $q\in f(M)$，$f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-r$ 维闭正则子流形.

证明 记 $f^{-1}(q)=A$，由定理条件 $A\neq\varnothing$. N 的闭子集 $\{q\}$ 在连续映射下的逆象是闭集，故 A 为 M 的闭子集. 由定理 2.1.2，对任意的 $p\in A$，可求得 M 中包含 p 的坐标图 $(U,\ \varphi;\ x^i)$ 和 N 中包含 q 的坐标图 $(V,\ \psi;\ y^\alpha)$，使得 $f(U)\subset V$，且 $\varphi(p)=0\in\boldsymbol{R}^m$，$\psi(q)=0\in\boldsymbol{R}^n$，且对 $f|_U$ 有

$$\psi\circ f|_U\circ\varphi^{-1}(x^1,\ \cdots,\ x^m)=(x^1,\ \cdots,\ x^r,\ \overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{(n-r)\text{个}}),$$

这意味着 U 中有且只有前 r 个坐标为零的点被 f 映射为 q，即

$$\begin{aligned}\varphi(A\cap U)&=\varphi\circ(f|_U)^{-1}\circ\psi^{-1}(0)\\&=\{(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\varphi(U)\,|\,x^1=\cdots=x^r=0\},\end{aligned}$$

因此 $A=f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-r$ 维闭正则子流形. ∎

推论 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形，$f:M\to N$ 为 C^s 映射，$q\in f(M)$. 如果 f 在 $A=f^{-1}(q)$ 上的每一点为淹没，则 A 是 M 的 $m-n$ 维闭正则子流形.

证明 由淹没和映射秩定义，利用定理 2.1.2 可知，若 f 在一点是淹没，则 f 在这一点的某个邻域上也是淹没. 于是存在 M 中的一个开子集 W，使 $A\subset W$，而 $f:W\to N$ 为淹没，即映射 f 在 W 上的秩等于 n. 利用上述定理，即知 A 是 M 的 $m-n$ 维闭正则子流形.

例 7 设 $f:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$$f(x^1,\ \cdots,\ x^m)=\sum_{i=1}^{m}(x^i)^2.$$

由例 3 可知，f 在 $f^{-1}(+1)$ 上的每一点为淹没. 因此单位球面

$$S^{m-1}=\left\{x\in \boldsymbol{R}^m\ \middle|\ \sum_{i=1}^{m}(x^i)^2=1\right\}=f^{-1}(+1)$$

是 $\boldsymbol{R}^m$ 的 $m-1$ 维闭正则子流形.

定理2.1.6 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形. C^s 映射 $f:M\to N$ 是淹没，Z 是 N 中余维数为 k 的正则子流形，且 $f^{-1}(Z)\neq\varnothing$，则 $f^{-1}(Z)$ 是 M 中余维数为 k 的正则子流形.

证明 我们只须局部地证明定理的结论. 对任一 $p\in f^{-1}(Z)$，记 $q=f(p)$. 取 N 中含 q 的子流形图 $(V,\ \psi)$，令 $U=f^{-1}(V)$，它是 M 含 p 的邻域. 于是，我们有 C^s 映射 $\pi\circ\psi\circ f:U\to\boldsymbol{R}^k$，这里 $\pi:\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{n-k}\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^k$ 是自然投影.

另一方面，因为 f 是淹没，根据秩定理 2.1.2，存在 M 含 p 的邻域 $U'\subset U$ 和坐标图 $(U',\ \varphi;\ x^i)$ 以及 N 含 q 的邻域 $V'\subset V$ 和坐标图 $(V',\ \psi')$，使得映射 $\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}$ 有如下形状

$$\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\ \cdots,\ x^m)=(x^1,\ \cdots,\ x^n),$$

并且不失一般性，可认为 $U'=f^{-1}(V')$. 于是

$$\begin{aligned}\pi'\circ\psi'\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\ \cdots,\ x^m)&=\pi'(x^1,\ \cdots,\ x^n)\\&=(x^{n-k+1},\ \cdots,\ x^n),\end{aligned}$$

其中 $\pi':\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^k$ 也是自然投影. 这表明 C^s 映射 $\pi'\circ\psi'\circ f:U'\to\boldsymbol{R}^k$ 的秩为 k，即它是淹没.

因为 ψ 和 ψ' 都是微分同胚，限制在 V' 上时，存在微分同胚 $\sigma:\psi(V')\to\psi'(V')$，使下列图可交换：

$$\begin{array}{ccccccc} U' & \xrightarrow{f} & V' & \xrightarrow{\psi} & \psi(V')\subset R^n & \xrightarrow{\pi} & R^k \\ & & & \searrow^{\psi'} & \sigma^{-1}\uparrow\ \downarrow\sigma & \nearrow_{\pi'} & \\ & & & & \psi'(V')\subset R^n & & \end{array}$$

由图可见

$$\pi\circ\psi\circ f=(\pi'\circ\sigma)\circ(\sigma^{-1}\circ\psi')\circ f=\pi'\circ\psi'\circ f.$$

因此，C^s 映射 $\pi\circ\psi|_{V'}\circ f:U'\to\boldsymbol{R}^k$ 也是淹没，且

$$U'\cap f^{-1}(Z)=(\pi\circ\psi|_{V'}\circ f)^{-1}(0).$$

再由定理 2.1.5 的推论，可见 $U'\cap f^{-1}(Z)$ 是 $U'\subset M$ 中余维数为 k 的正则子流形. ▌

1.5 单位分解

单位分解是将流形的局部性质和整体性质联系起来的一个有力工具. 这一节的目的是要证明微分流形上单位分解的存在性，然后给出它的应用.

设 M 是一个拓扑空间，$\{U_\alpha\}$ 是它的一族子集，若对于每点 $p\in M$，存在一个 p 的邻域 W_p，使得 W_p 只与 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个 U_α 相交，则称 $\{U_\alpha\}$ 是**局部有限的**.

设 $\{U_\alpha|\alpha\in\mathscr{A}\}$、$\{V_\beta|\beta\in\mathscr{B}\}$ 均为 M 的覆盖，若对于每一个 $\beta\in\mathscr{B}$，至少存在一个 $\alpha\in\mathscr{A}$，使得 $V_\beta\subset U_\alpha$，则称覆盖 $\{V_\beta\}$ 是覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的**加细**.

引理 设 M 为具有可数基的 m 维 C^k 流形，$\{A_\alpha\}$ 为 M 的任意开覆盖，则存在由可数个坐标图构成的 $\{A_\alpha\}$ 的局部有限加细 $\{(U_j,\ \varphi_j)|j=1,\ 2,\ \cdots\}$，使得 $\varphi_j(U_j)=B_1^m(0)$，且 $\{V_j=\varphi_j^{-1}(B_{1/2}^m(0)|j=1,\ 2,\ \cdots\}$ 也是 M 的开覆盖.

证明 因为流形 M 是局部欧氏的，故是局部紧致的. 又因为 M 具有可数基，故存在可数个开集 $\{P_j\}$，使得 $\bigcup\limits_j P_j\supset M$，且每个 $\overline{P}_j$ 都是紧致的. 利用 $\{P_j\}$，按如下方式定义 M 上一系列紧致集 $K_0,\ K_1,\ K_2,\ \cdots,K_0=\varnothing$，$K_1=\overline{P}_1$，且若 $K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_i$ 已有定义，而 r 是使得 $K_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{r}P_j$ 的第一个整数，则定义

$$K_{i+1}=\overline{\bigcup_{j=1}^{r} P_j}.$$

以 $\mathring{K}_{i+1}$ 表示 K_{i+1} 的内点集，易见 $K_i\subset\mathring{K}_{i+1}$，且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i=M$. 此外，$K_i$ 为闭集，$\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1}$ 为开集，$K_{i+1}-\mathring{K}_i$ 为闭紧致集. $M\subset\bigcup_{i=0}^{\infty}(K_{i+1}-\mathring{K}_i)$.

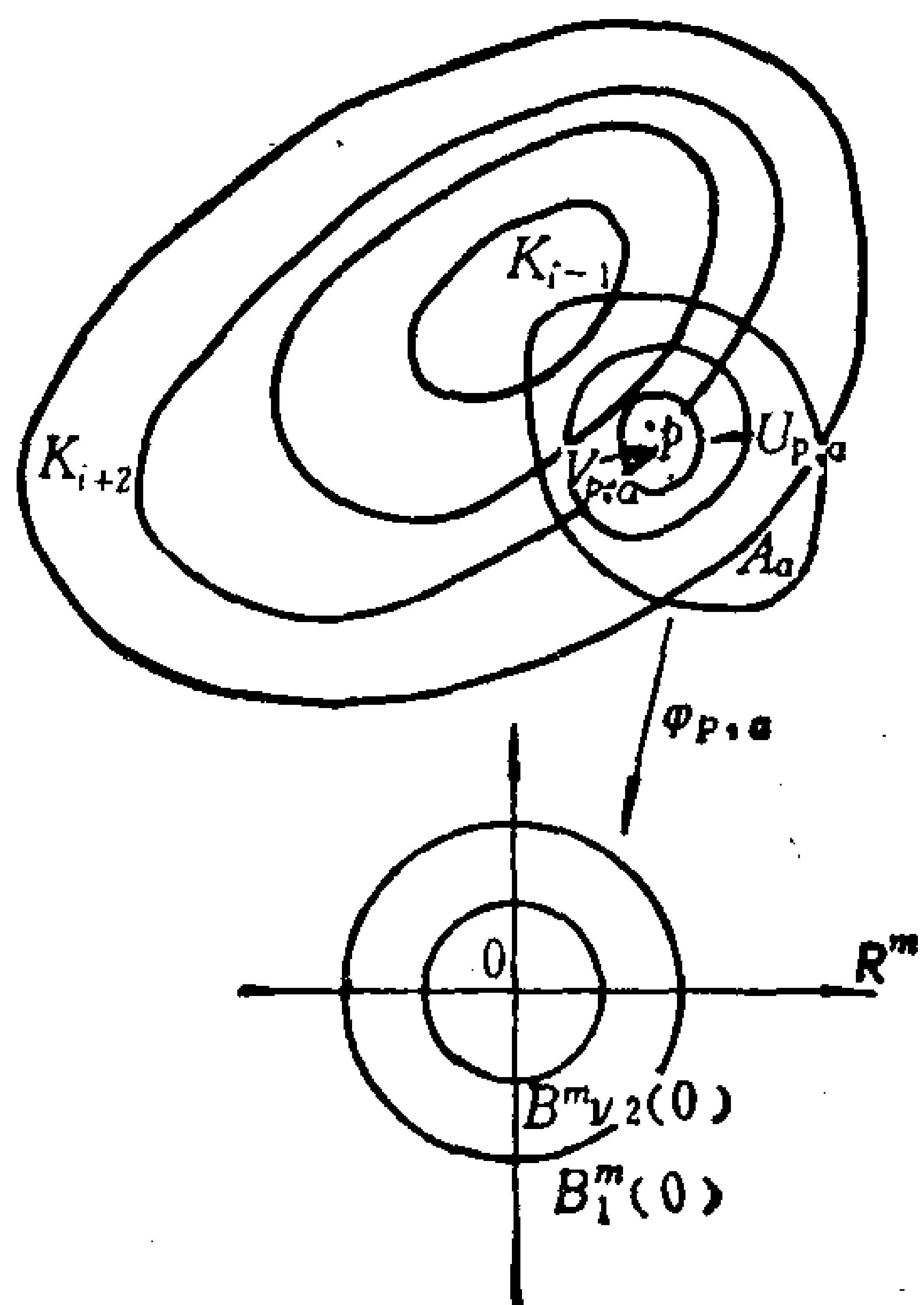


图 6

对于一个固定的 i，考虑开集 $(\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1})\cap A_\alpha$. 对其内任一点 p，选取位于其内的一个坐标图 $(U_{p,\alpha},\ \varphi_{p,\alpha})$，使得 $\varphi_{p,\alpha}(p)=0$，$\varphi_{p,\alpha}(U_{p,\alpha})=B_1^m(0)$. 且设 $V_{p,\alpha}=\varphi_{p,\alpha}^{-1}(B_{1/2}^m(0))$，则

$$V_{p,\alpha}\subset U_{p,\alpha}\subset(\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1})\cap A_\alpha.$$

让 p，α 变化，因为 $K_{i+2}-\mathring{K}_i$ 是紧致的，故可取有限个 $V_{(i)1}$，…，$V_{(i)i_r}$ 覆盖 $K_{i+1}-\mathring{K}_i$. 显然 $\{V_{(i)\theta}\mid 1\leqslant\theta\leqslant i_r,\ 1\leqslant i<+\infty\}$ 为 M 的可数开覆盖. 可以证明 $\{(U_{(i)\theta},\ \varphi_{(i)\theta})\}$ 和 $\{V_{(i)\theta}\}$ 即为引理中所需要的. 事实上，由以上所作，即知 $\{U_{(i)\theta}\}$ 是 $\{A_\alpha\}$ 的加细. 此外，对任一点 $p\in M$，存在 M 上包含 p 的一个邻域 W 及一个指标 j_0，使得 $p\in W\subset\mathring{K}_{j_0-1}$. 但由 $U_{(i)\theta}$ 的定义以及

$$W\cap U_{(i)\theta}\subset W\cap(\mathring{K}_{i+2}-K_{i-1})\subset\mathring{K}_{j_0-1}\cap(\mathring{K}_{i+1}-K_{i-1})$$
$$=\varnothing,\quad i\geqslant j_0,$$

即知 $\{U_{(i)\theta}\}$ 是局部有限的. 我们将这样得到的开覆盖 $\{A_\alpha\}$ 的局部有限加细 $\{(U_i,\ \varphi_i;\ V_i)\}$ 称为从属于 $\{A_\alpha\}$ 的正则覆盖. ▌

流形 M 上实值函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 的支集是指使 $f(p)\neq0$ 的点集

的闭包，表成

$$\mathrm{supp}(f)=\overline{\{p\in M\,|\,f(p)\neq 0\}}.$$

定义 2.1.12 m 维 C^k 流形 M 上的一族 C^k 函数 $\{f_i|i\in I\}$，I 为正整数集，若具有下述性质：

(i) $f_i(p)\geqslant 0$，对于任一点 $p\in M$；

(ii) $\sum_i f_i(p)=1$，对于任一点 $p\in M$；

(iii) $\{\mathrm{supp}(f_i)\}$ 为 M 的局部有限的覆盖，则称 $\{f_i\}$ 为 M 上的 C^k 单位分解．

设 $\{A_\alpha\}$ 为 M 的一个开覆盖，$\{f_i\}$ 为 M 上的单位分解．若对于每个 i，存在一个 A_α，使得 $\mathrm{supp}(f_i)\subset A_\alpha$，则称 $\{f_i\}$ 为从属于 $\{A_\alpha\}$ 的单位分解．

定理 2.1.7（单位分解定理） 设 M 为具有可数基的 C^k 流形，$\{(U_i,\ \varphi_i;\ V_i)\}$ 为 M 的正则覆盖，则存在一个单位分解 $\{f_i\}$，使得在 V_i 上 $f_i>0$，且 $\mathrm{supp}(f_i)\subset\varphi_i^{-1}(\overline{B^m_{3/4}(0)})$．

由定理即知，上述每一个函数 f_i 都具有紧致支集，而且 M 的每一个开覆盖 $\{A_\alpha\}$，都有从属于它的单位分解．

证明 由定理 2.1.1，对每一个 i，存在 $\boldsymbol{R}^m$ 上一个非负 C^∞ 函数 $\tilde{g}_i$，它在 $\overline{B^m_{1/2}(0)}$ 上恒等于 1，而在 $B^m_{3/4}(0)$ 外恒为零．设 $g_i=\tilde{g}_i\circ\varphi_i$，$g_i$ 为 C^k 函数，它在 V_i 上恒为 1，在 $\varphi_i^{-1}(B^m_{3/4}(0))$ 外恒为零．即 $\mathrm{supp}(g_i)\subset\varphi_i^{-1}(\overline{B^m_{3/4}(0)})$．又因为 $\{V_i|i=1,\ 2,\ \cdots\}$ 是 M 的局部有限的覆盖，故知由

$$f_i=g_i/\sum_i g_i$$

给定的函数族 $\{f_i\}$ 是 M 上符合定理要求的一个单位分解．∎

作为单位分解的应用，我们给出下述定理．

定理 2.1.8 设 M 是紧致 m 维微分流形，则存在一个正整数 n 及映射 $f:M\to\boldsymbol{R}^n$，使得 f 为嵌入，从而 $f(M)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则子

流形.

证明 因为 M 紧致，故存在一个由有限个坐标图组成的正则覆盖 $\{(U_i, \varphi_i; V_i) | i=1, \cdots, k\}$. 对每一个 i, 由单位分解定理可知，存在函数 $g_i: M\to\mathbf{R}$, 使得 $g_i(M)\subset[0,1]$, $V_i\subset\operatorname{supp}(g_i)\subset U_i$, 且在 V_i 上恒为1. 令 $f: M\to\mathbf{R}^{mk+k}$, 使得

$$f(p)=(g_1\varphi_1(p), \cdots, g_k\varphi_k(p), g_1(p), \cdots, g_k(p)),$$

这里 $g_i\varphi_i: M\to\mathbf{R}^m$ 由下述方式定义:

$$g_i\varphi_i(p)=\begin{cases} g_i(p)\varphi_i(p), & p\in U_i, \\ 0, & p\overline{\in} U_i. \end{cases}$$

我们证明 f 是嵌入. 因为 M 紧致，根据命题 2.1.4, 只须证明 f 是单浸入. 首先，f 是浸入，这是因为若 $p\in M$ 是任意一点，则存在某个 V_{i_0}, 使 $p\in V_{i_0}$. 由于在 V_{i_0} 上 $g_{i_0}\varphi_{i_0}=\varphi_{i_0}$, 又 φ_{i_0} 是微分同胚，故 $D(f\circ\varphi_{i_0}^{-1})_{\varphi_{i_0}(p)}$ 中包含一个非奇异的 m 阶方阵. 于是 f 在 p 点的秩为 m. 由 p 点的任意性，可知 f 是浸入.

其次，可以证明 f 是单射. 事实上，若 $p, q\in M$, 使 $f(p)=f(q)$, 由映射 f 的定义可知，$g_i\varphi_i(p)=g_i\varphi_i(q)$, $g_i(p)=g_i(q)$. 不妨设 $p\in V_{i_0}$, 故 $g_{i_0}(p)=g_{i_0}(q)=1$, 于是 $q\in U_{i_0}$, 则由 $g_{i_0}(p)\varphi_{i_0}(p)=g_{i_0}(q)\varphi_{i_0}(q)$ 可得 $\varphi_{i_0}(p)=\varphi_{i_0}(q)$. 由于 φ_{i_0} 是单射，故必有 $p=q$. ∎

上述定理表明，紧致微分流形可嵌入某个 $\mathbf{R}^n$ 作为正则子流形. 这个结论对非紧致微分流形也成立. H. Whitney 证明了任意一个 m 维具有可数基的微分流形均可嵌入 $\mathbf{R}^{m+1}$ 中作为子流形(参阅[4]). 因此，虽然流形的概念是欧氏空间的一般推广，但它仍可作为欧氏空间的嵌入子流形来实现.

习 题

1. 对于 $S^m=\left\{(x^1, \cdots, x^{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}(x^i)^2=1\right\}$, 使用从北极 $N(0,$

$\cdots, 0, 1)$出发的球极射影，决定一个坐标图(U_N, φ_N). 相仿，从南极$S(0, \cdots, 0, -1)$出发决定一个坐标图(U_S, φ_S). 证明$\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$是$S^m$的一个$C^\infty$坐标图册.

2. 证明上述S^m的坐标图册与§1.1例2中所述的S^m的坐标图册决定S^m上同一个微分结构.

3. 证明§1.2例6中$G(2, 4)$为4维C^∞流形.

4. 设M、N、W均为C^k流形，$f:M\to N$, $g:N\to W$均为C^k映射. 证明由

$$(f\times g)(x, y)=(f(x), g(y)), \quad x\in M, y\in N$$

定义的映射$f\times g:M\times N\to N\times W$是$C^k$的.

5. 证明$f:S^m\to P^m(\boldsymbol{R})$, $(x^1, \cdots, x^{m+1})\in S^m\subset \boldsymbol{R}^{m+1}\overset{f}{\mapsto}[(x^1, \cdots, x^{m+1})]\in P^m(\boldsymbol{R})$，是秩为$m$的$C^\infty$映射，其中$S^m$为$m$维单位球面，$P^m(\boldsymbol{R})$为$m$维实射影空间.

6. 设$f:M\to N$是淹没，试证明f是开映射.

7. 设Σ为$\boldsymbol{R}^{m+1}$中由方程$x^{m+1}=f(x^1, \cdots, x^m)$确定的超曲面. 其中$f$为$C^k$函数. 证明$\Sigma$为$\boldsymbol{R}^{m+1}$中的$C^k$正则子流形.

8. 证明圆环面$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b)^2+z^2=a^2$为$\boldsymbol{R}^3$中的2维正则子流形.

9. 设$F_\alpha(x^1, \cdots, x^m)(\alpha=1, \cdots, k<m)$为$\boldsymbol{R}^m$上$k$个函数独立的$C^\infty$函数. 证明：由方程组

$$F_\alpha(x^1, \cdots, x^m)=C_\alpha \quad (C_\alpha\text{为常数}, \alpha=1, \cdots, k)$$

确定的$m-k$维流形是$\boldsymbol{R}^m$的正则子流形.

10. 设$F:W\to N$为光滑流形间的C^∞映射，M为N的正则子流形，且$F(W)\subset M$，证明$F:W\to M$也是C^∞映射.

11. 设$f:M\to N$是单浸入，且f是逆紧的（即任何紧致集的逆象是紧致集），证明f是嵌入.

12. 设S_1和S_2是微分流形M上的两个不相交的闭集. 证明存在M上的C^∞函数f，使得

$$f(p)=\begin{cases}1, & p\in S_1,\\ 0, & p\in S_2.\end{cases}$$

13. 设W是m维微分流形M的开子集，$g:W\to\boldsymbol{R}$是C^∞函数，$p\in W$，则存在C^∞函数$\bar{g}:M\to\boldsymbol{R}$，使得$\bar{g}$与$g$在$p$的某邻域上一致.

§2 向 量 场

2.1 切空间 切映射

设 $I_a=(-a, a)$为开区间，M 为 C^k 流形. $C^s(s\leqslant k)$映射 $C: I_a\to M$ 称为流形 M 上的 C^s 曲线，它在流形 M 的坐标图 (U, φ)中的局部坐标表示为

$$x^i=x^i(C(t)), \quad C(t)\in U, \tag{2.2.1}$$

或简单地写为

$$x^i=x^i(t).$$

对于任一点 $p\in M$，设$(U, \varphi; x^i)$是包含点 p 的坐标图. 以

$$\mathscr{C}(p)=\{C: I_a\to M \mid C(0)=p\}$$

表示 M 上过 p 点的曲线的集合. 在 $\mathscr{C}(p)$中，定义一个等价关系 $\sim$ 如下：设 $C_1, C_2\in\mathscr{C}(p)$，如果

$$\left.\frac{dx^i(C_1(t))}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dx^i(C_2(t))}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2.2.2}$$

则 $C_1\sim C_2$. 易见这个定义是与坐标图的选取无关. 用 $[C]$ 表示 $C\in\mathscr{C}(p)$的等价类.

设 C 是$[C]$的一个代表元，$\left.\dfrac{dx^i(C(t))}{dt}\right|_{t=0}=\xi^i$，后者与$[C]$中代表元的选取无关. 设 W 为 M 上包含 p 点的邻域，$f\in C^k(W)$. 用下式来定义 f 沿$[C]$在 p 点的方向导数

$$\frac{d}{dt}f(C(t))\Big|_{t=0}=\left.\frac{\partial\hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(C(0))}\cdot\left.\frac{dx^i(C(t))}{dt}\right|_{t=0}\equiv\xi^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p, \tag{2.2.3}$$

式中

$$\hat{f}=f\circ\varphi^{-1}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p\equiv\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(C(0))}=\left(\frac{\partial\hat{f}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}. \tag{2.2.4}$$

因此可将$[C]$等同于一个映射 $X_p \equiv \xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : C^s(W) \to \boldsymbol{R}$,

$$f \mapsto X_p f \equiv \xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p.$$

映射 X_p 称为在 p 点的切向量. 设 X_p、Y_p 是在 p 点的任意二个切向量, a, $b \in \boldsymbol{R}$, 则由

$$(aX_p + bY_p)f = aX_p f + bY_p f$$

定义的 $aX_p + bY_p$ 也是在 p 点的切向量. 因而 M 在 p 点的切向量全体构成 $\boldsymbol{R}$ 上的一个向量空间, 此向量空间称为 M 在 p 点的切空间, 用 $T_p(M)$ 表示. 显然, 若 W 为 M 的开子流形, $p \in W$, 则 $T_p(W) = T_p(M)$.

命题 2.2.1 对于任意的 f, $h \in C^r(W)$ $(r \geqslant 1)$ 和 a, $b \in \boldsymbol{R}$, 切向量 X_p 满足下述二个条件

$$\begin{cases} \text{(i)} \ X_p(af + bh) = aX_p f + bX_p h; \\ \text{(ii)} \ X_p(fh) = (X_p f)h(p) + f(p)(X_p h). \end{cases} \tag{2.2.5}$$

反之, 任何满足条件(2.2.5)的映射 $X_p : C^r(W) \to \boldsymbol{R}$ $(r \geqslant 2)$ 必为切向量, 即对任意的 $f \in C^r(W)$, $X_p f = \xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$.

证明 命题的前半部分是明显的. 下面证明其逆部分. 首先由(2.2.5)的(ii),

$$X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = 2X_p(1)$$

故 $X_p(1) = 0$. 再由(2.2.5)的(i), 可知对于任意常数 a, 有

$$X_p(a) = 0.$$

因为 $f \in C^r(W)$, $r \geqslant 2$, 故 f 可表成

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (x^i - x_0^i)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m} h_{ij}(x)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j),$$
$$h_{ij}(x) \in C^{r-2}(W),$$

其中$(x_0^1, \cdots, x_0^m)$是 p 点的坐标．于是有

$$X_p f = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p X_p(x^i) \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \xi^i, \quad \xi^i \equiv X_p(x^i),$$

即 X_p 为一个切向量．▌

由于命题 2.2.1，我们也可以直接用条件(2.2.5)来定义在一点的切向量．

命题 2.2.2 设 $(U, \varphi; x^i)$ 是包含 p 点的坐标图，则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \middle| 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$是切空间 $T_p(M)$ 的一组基．于是 $\dim T_p(M) = m = \dim M$．

证明 由命题 2.2.1 的证明过程，只需再证$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (i=1, \cdots, m)$是线性无关的．事实上，若 $L \equiv \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = 0$，则对于坐标函数 $x^i \in C^k(W)$，有 $0 = L(x^i) = \lambda^i$，$i=1, \cdots, m$．▌

$T_p(M)$的对偶空间称为 M 在 p 点的**余切空间**，用 $T_p^*(M)$表示．$T_p^*(M)$的元素称为**余切向量**．设 $f \in C^r(U)$，$(U, \varphi; x^i)$是 M 上包含 p 的坐标图，用下述方式定义一个余切向量 $df_p \in T_p^*(M)$：对任何 $X_p \in T_p(M)$，定义

$$df_p(X_p) = \langle X_p, df_p \rangle = X_p f. \tag{2.2.6}$$

df_p 称为 f 在 p 点的**微分**．

取 $X_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$，$f = x^j$，则

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, dx_p^j \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} x^j\right)_p = \delta_i^j. \tag{2.2.7}$$

故$\{(dx^i)_p | 1 \leqslant i \leqslant m\}$是 $T_p^*(M)$的一组基，它是$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$的对偶基．$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}$和$\{(dx^i)_p\}$分别称为 M 在点 p 的切空间和余切空间的**自然基**．由(2.2.6)和(2.2.7)，即知

$$df_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p dx_p^i.$$

因此，这里定义的流形上 $C^r(r\geqslant 1)$ 函数在一点的微分正是初等微积分中微分概念的推广.

以下来讨论在不同局部坐标系中自然基的变换公式.

命题 2.2.3 设 $(U,\varphi;x^i)$ 和 $(\tilde{U},\tilde{\varphi};\tilde{x}^i)$ 为 M 上包含 p 点的两个坐标图，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\right)_p=\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)_{\tilde{\varphi}(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p;\qquad (d\tilde{x}^i)_p=\left(\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}(dx^j)_p. \tag{2.2.8}$$

证明 对于任意的 $f\in C^r(U\cap\tilde{U})$，由 (2.2.3)，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^i}\right)_p=\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}(f\circ\tilde{\varphi}^{-1})|_{\tilde{\varphi}(p)}=\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\tilde{\varphi}^{-1})|_{\tilde{\varphi}(p)}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}(f\circ\varphi^{-1})|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)_{\tilde{\varphi}(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)_{\tilde{\varphi}(p)}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_p,$$

从而即得 (2.2.8) 的第一式. 利用此式及 (2.2.7)，容易求得 (2.2.8) 的第二式. ▌

由上述命题，对于任意的切向量

$$X_p=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p=\tilde{X}^j\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^j}\right)_p$$

和余切向量 $\theta_p=\theta_i(dx^i)_p=\tilde{\theta}_j(d\tilde{x}^j)_p$，在不同的坐标图里，它们的分量之间的变换公式分别为

$$\tilde{X}^i=X^j\left(\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)_p; \tag{2.2.9}$$

$$\tilde{\theta}_i=\theta_j\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^i}\right)_p. \tag{2.2.10}$$

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形，$f:M\to N$ 为 $C^s(s\leqslant k)$ 映射，$p\in M$，$q=f(p)$. 设 $(U,\varphi;x^i)$ 和 $(V,\psi;y^\alpha)$ 分别是 M 上包

含 p 点和 N 上包含 q 点的坐标图，且 $f(U)\subset V$. 因此，若 $g\in C^r(V)\ r\leqslant s$，则 $g\circ f\in C^r(U)$. 下面给出二个重要的 $\boldsymbol{R}$-线性映射：

$$f_{*p}:T_p(M)\to T_q(N);$$

$$f_p^*:T_q^*(N)\to T_p^*(M).$$

设 $X_p\in T_p(M)$，定义 $f_{*p}X_p$ 如下：对任意的 $g\in C^r(V)$，定义

$$(f_{*p}X_p)g=X_p(g\circ f). \tag{2.2.11}$$

可以证明由上式定义的 $f_{*p}X_p$ 确为切向量，即 $f_{*p}X_p\in T_q(N)$. 设 $h\in C^r(V)$，记 $Y_q=f_{*p}X_p$，于是

$$\begin{aligned}Y_q(g\cdot h)&=f_{*p}X_p(g\cdot h)=X_p((g\circ f)\cdot(h\circ f))\\&=(X_p(g\circ f))h(f(p))+g(f(p))X_p(h\circ f)\\&=(Y_qg)h(q)+g(q)(Y_qh).\end{aligned}$$

同样可证 $Y_q(ag+bh)=aY_qg+bY_qh,\ a,b\in\boldsymbol{R}$. 因此 $Y_q\in T_q(N)$. 此外，f_{*p} 明显是 $\boldsymbol{R}$-线性的，即 $f_{*p}:T_p(M)\to T_q(N)$ 为同态.

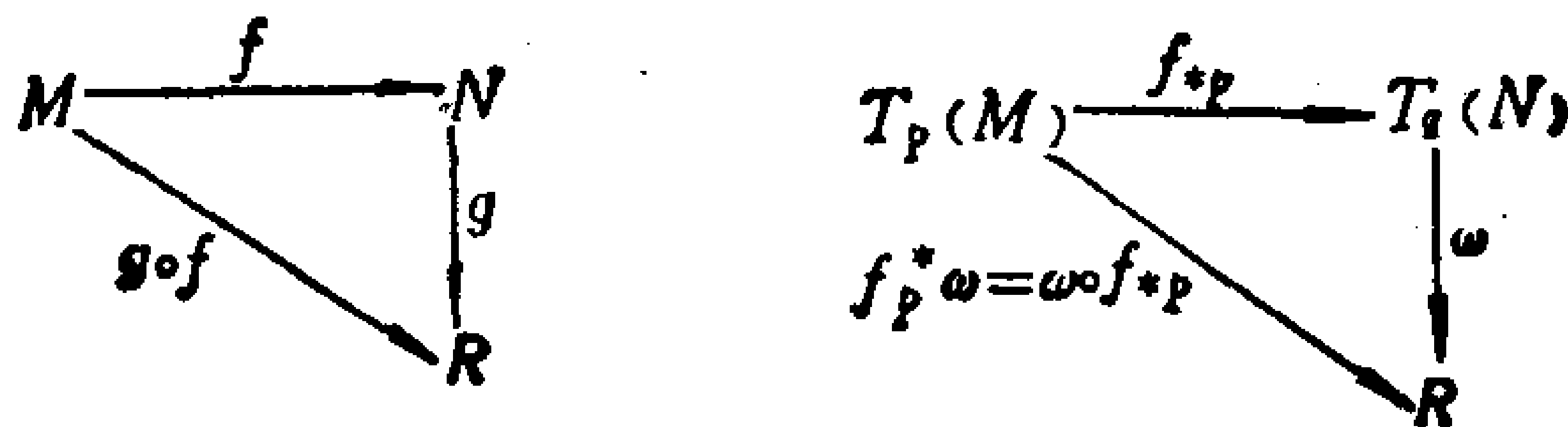
设 $\omega\in T_q^*(N)$，定义 $f_p^*\omega$ 如下：对任意的 $X_p\in T_p(M)$，定义

$$\langle f_p^*\omega,\ X_p\rangle=\langle\omega,\ f_{*p}X_p\rangle. \tag{2.2.12}$$

相仿可证 $f_p^*\omega\in T_p^*(M)$，且 $f_p^*:T_q^*(N)\to T_p^*(M)$ 为同态. 上式的右侧可写成 $\omega(f_{*p}X_p)=(\omega\circ f_{*p})X_p$，故(2.2.12)等价于

$$f_p^*\omega=\omega\circ f_{*p}, \tag{2.2.12'}$$

即我们有下述交换图



使用以上记号，我们给出

定义 2.2.1 f_{*p} 称为在 p 点的**切映射**或**微分**，也记成 df_p 或 Df_p，f_p^* 称为 f_{*p} 的**对偶映射**.

注意，若 $N=\boldsymbol{R}$，则 $f:M\to\boldsymbol{R}$，即 $f\in C^s(M)$，故上述定义的微

分正是前面函数微分的推广．

下述命题是容易证得的（留作习题）．

命题 2.2.4 若 $f:M_1\to M_2$ 为 C^r 微分同胚，则 $f_{*p}:T_p(M_1)\to T_{f(p)}(M_2)$ 和 $f_p^*:T_{f(p)}^*(M_2)\to T_p^*(M_1)$ 均为同构．设 $h=g\circ f$ 是 C^r 映射的合成，则

$$h^*=f^*\circ g^*,\qquad h_*=g_*\circ f_*.$$

设 $(U,\ \varphi;\ x^i)$ 为 C^k 流形 M 的坐标图，则 $\varphi:U(\subset M)\to\varphi(U)(\subset \boldsymbol{R}^m)$ 为 C^k 微分同胚，故 $\varphi_{*p}:T_p(M)\to T_{\varphi(p)}(\boldsymbol{R}^m)$ 为同构，在每一点 $\varphi(p)\in\boldsymbol{R}^m$，$T_{\varphi(p)}(\boldsymbol{R}^m)$ 有一组自然基 $\frac{\partial}{\partial x^1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^m}$，因此 $(\varphi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^1},\ \cdots,\ (\varphi^{-1})_*\frac{\partial}{\partial x^m}$ 是 $T_p(M)$ 的一组基．其实，它们正是先前我们所说的 $T_p(M)$ 的一组自然基，但常表成 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\ \cdots,\ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$．因此，由 (2.2.11)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p g=(\varphi^{-1})_{*\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)} g=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(g\circ\varphi^{-1})\big|_{\varphi(p)},$$

这正与 (2.2.3) 式相吻合．

设 $f:M\to N$ 为 C^k 流形间的 $C^s(s\leqslant k)$ 映射，$p\in M$．设 $(U,\varphi;\ x^i)$ 为包含 p 的坐标图，$(V,\ \psi;\ y^\alpha)$ 为包含 $q=f(p)$ 的坐标图，$f(U)\subset V$．则 $f:M\to N$ 局部地可表示成

$$y^\alpha=f^\alpha(x^1,\ \cdots,\ x^m),\qquad \alpha=1,\ \cdots,\ n.$$

使用以上记号，有

定理 2.2.5 设 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\Big|1\leqslant i\leqslant m\right\}$ 和 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{f(p)}\Big|1\leqslant\alpha\leqslant n\right\}$ 分别为 $T_p(M)$ 和 $T_q(N)(q=f(p))$ 的自然基，则

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p=\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{f(p)},\tag{2.2.13}$$

$$f_p^*(dy^\alpha)_{f(p)}=\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}(dx^i)_p.\tag{2.2.14}$$

证明　只证第一式．对任意的 $g\in C^r(V)(r\leqslant s)$，由(2.2.11)有

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p g=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(g\circ f)=\frac{\partial}{\partial x^i}(g\circ f\circ\varphi^{-1})\big|_{\varphi(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(g\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\big|_{\varphi(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)(g\circ\psi^{-1})_{\psi(f(p))}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}$$

$$=\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_q g.$$

由 g 的任意性，即有(2.2.13)．∎

推论　设 $X_p=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$，$f_{*p}X_p=Y_{f(p)}=Y^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{f(p)}$，则

$$Y^\alpha=X^i\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)};\qquad (2.2.15)_1$$

设 $\theta_{f(p)}=\theta_\alpha(dy^\alpha)_{f(p)}$，$f_p^*\theta=\omega_i(dx^i)_p$，则

$$\omega_i=\theta_\alpha\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_p.\qquad (2.2.15)_2$$

由(2.2.13)可知，$f_{*p}(T_p(M))$ 的维数等于 $f:M\to N$ 在 p 的秩．于是，若 f 在 p 点为浸入，则 $f_{*p}:T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$ 是单射；若 f 在 p 点为淹没，则 f_{*p} 是满射．反之亦然．

2.2　切丛　向量场

设 M 为 m 维 C^k 流形，$T_p(M)$ 为 M 在 p 点的切空间．记

$$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M)=\{X_p\in T_p(M)\mid p\in M\}.$$

以下在 $T(M)$ 上引入拓扑和 C^{k-1} 微分结构，使它成为一个 C^{k-1} 流形，并且局部地与积流形同胚．作映射

$$\pi:T(M)\to M,\quad X_p\mapsto p,\quad \forall X_p\in T_p(M).$$

设 $(U,\varphi;x^i)$ 为 M 的任一个坐标图，记

$$\widetilde{U}=\pi^{-1}(U)=\{X_p\in T_p(M)\mid p\in U\}.$$

再定义映射 $\qquad \tilde{\varphi}:\widetilde{U}\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^m,$

$$X_p=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\mapsto(x^1(p),\ \cdots,\ x^m(p),\ X^1,\ \cdots,\ X^m).$$

显然，$\tilde{\varphi}$ 是双射. 现取 M 的可数个坐标图$\{(U_i,\ \varphi_i)\}$使得$\{U_i\}$覆盖 M 且为 M 的可数基. 从而可定义$\{\tilde{\varphi}_i^{-1}(A\times B)\subset T(M)\mid A$ 为 $\varphi_i(U_i)$ 的开集，B 为 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集，$i=1,\ 2,\ \cdots\}$为 $T(M)$的拓扑基. 使用上述记号，有

定理2.2.6 设 M 为 m 维 C^k 流形，则在 $T(M)$上存在一个拓扑，使得对 M 的每个坐标图$(U,\ \varphi;\ x^i)$，集合 $\widetilde{U}=\pi^{-1}(U)$是 $T(M)$的开集，$\tilde{\varphi}:\widetilde{U}\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^m$ 为同胚，并且坐标图册$\{(\widetilde{U},\ \tilde{\varphi})\}$决定了 $T(M)$上的一个 C^{k-1} 微分结构，从而 $T(M)$ 成为 $2m$ 维 C^{k-1} 微分流形.

证明 由 $T(M)$中拓扑基的定义，即知 $T(M)$是具有可数基的 Hausdorff 空间，且是局部欧氏的. 此外，易见 $\tilde{\varphi}:\widetilde{U}\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^m$ 为同胚，且 π 是 $T(M)$到 M 上的开映射.

现设$(U,\ \varphi;\ x^i)$和$(\overline{U},\ \bar{\varphi};\ \bar{x}^i)$是 M 的两个坐标图，$U\cap\overline{U}\neq\varnothing$. 在 $U\cap\overline{U}$ 上，坐标变换的公式为

$$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,\ \cdots,\ x^m),\quad i=1,\ \cdots,\ m,$$
$$(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\varphi(U\cap\overline{U}).$$

对 $p\in U\cap\overline{U}$，$X_p\in T_p(M)$，在这两个坐标图中可表成

$$X_p=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p=\overline{X}^i\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i}\right)_p,\quad \overline{X}^i=X^j\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(p)}.$$

故据 $\tilde{\varphi}$ 的定义，$\circ\tilde{\varphi}^{-1}:\tilde{\varphi}(\widetilde{U}\cap\widetilde{U})\to\tilde{\varphi}(\widetilde{U}\cap\widetilde{\overline{U}})$的变换公式为

$$\tilde{\bar{\varphi}}\circ\tilde{\varphi}^{-1}\ (x^1,\ \cdots,\ x^m,\ X^1,\ \cdots,\ X^m)$$
$$=\left(\bar{x}^1(x),\ \cdots,\ \bar{x}^m(x),\ X^i\left(\frac{\partial\bar{x}^1}{\partial x^i}\right),\ \cdots,\ X^i\left(\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^i}\right)\right).$$

易见 $\tilde{\bar{\varphi}}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ 是 C^{k-1} 的微分同胚. 又因为$\{(\widetilde{U}_i,\ \tilde{\varphi}_i)\}$覆盖了 $T(M)$,

故 C^{k-1} 坐标图册$\{(\widetilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)\}$确定了 $T(M)$上的 C^{k-1} 微分结构，使之成为 $2m$ 维 C^{k-1} 微分流形．此外，在每个坐标图$(\widetilde{U}, \tilde{\varphi})$上，$\widetilde{U}$ 与 $\varphi(U)\times \boldsymbol{R}^m$ 是 C^{k-1} 微分同胚的，即局部上，$T(M)$ 与积流形 $\varphi(U)\times \boldsymbol{R}^m$ 是 C^{k-1} 微分同胚的．在局部坐标中，π 对应于 $\boldsymbol{R}^m\times \boldsymbol{R}^m$ 到其第一个因子的射影．▌

定义 2.2.2 $(T(M), \pi, M)$，或简单地 $T(M)$，称为 M 上的**切丛**．π 称为**自然射影**．$T_p(M)$称为 $T(M)$在 p 点的**纤维**．

相仿，命
$$T^*(M)=\bigcup_{p\in M}T_p^*(M),$$
可在其上引进拓扑和 C^{k-1} 微分结构，使之成为 $2m$ 维 C^{k-1} 微分流形，它局部地与积流形微分同胚．$T^*(M)$称为 M 上的**余切丛**．

定义 2.2.3 C^k 流形 M 的**向量场** X 是一个映射 $X:M\to T(M)$，使得自然射影 $\pi:T(M)\to M$ 与 X 的复合为恒同映射．即
$$X:p\mapsto X_p\in T_p(M).$$
设 $f\in C^k(M)$，令
$$Xf(p)=X_pf,\qquad \forall p\in M.$$
如果对于任意的 $f\in C^k(M)$，$Xf\in C^s(M)$，$s\leqslant k-1$，则向量场 X 称为是 C^s 的．若 $X_p=0$，则称 p 点为向量场 X 的**奇点**．

设$(U, \varphi; x^i)$是 M 的一个坐标图，则向量场 X 在局部坐标系中可表成
$$X(x)=X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,\qquad x=(x^1, \cdots, x^m)\in\varphi(U).$$
设$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$是 M 的一个覆盖，可见向量场 X 为 C^s 向量场的充要条件是，在每一个 U_α 上，X 的分量 $X^i_{(\alpha)}(x)$ $(i=1, \cdots, m)$均是 C^s 函数．

设$(\overline{U}, \bar{\varphi}; \bar{x}^i)$是 M 的另一个坐标图，$U\cap\overline{U}\neq\varnothing$．且设 $X(\bar{x})=\overline{X}^i(\bar{x})\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\bar{x}}$，则对于 $U\cap\overline{U}$ 中的点，有

$$\overline{X}^i(\bar{x}(x))=X^j(x)\left(\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_x,\quad x\in\varphi(U\cap\overline{U}).\quad(2.2.16)$$

此即为向量场 X 在不同的局部坐标图中分量的变换公式.

明显地，在局部范围内，存在 m 个向量场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\middle| i=1,\cdots,m\right\}$. 它们在某个局部邻域 U 上均无奇点，但就整体而言却不尽然. 例如在球面 S^2 上，不存在无奇点的向量场(参阅[14]). 向量场在奇点附近的性状是很复杂的，但在非奇点的邻近，我们有

定理 2.2.7 设 X 是 m 维 C^k 流形 M 上的 C^{k-1} 向量场，如果点 $p\in M$ 不是向量场 X 的奇点，则存在包含点 p 的一个坐标图 $(U,\varphi;x^i)$，使得 X 限制在 U 上，有

$$X|_U=\frac{\partial}{\partial x^1}.\tag{2.2.17}$$

证明 显然，存在含有 p 点的坐标图 $(U_1,\varphi_1;z^i)$. 使得 $z^i(p)=0(1\leqslant i\leqslant m)$，并且

$$X|_{U_1}=\xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i},$$

其中 ξ^i 是 U_1 上的 C^{k-1} 函数. 因为 $X_p\neq0$，不妨设 $\xi^1(p)\neq0$. 由于 ξ^1 的连续性，可假定 U_1 是 p 的充分小邻域，使得 ξ^1 在 U_1 上处处不为零. 考虑常微分方程组

$$\frac{dz^\alpha}{dz^1}=\frac{\xi^\alpha(z^1,\cdots,z^m)}{\xi^1(z^1,\cdots,z^m)},\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m,\tag{2.2.18}$$

其中 z^1 看作自变量，$z^\alpha(\alpha=2,\cdots,m)$ 是未知函数. 根据常微分方程理论(参考附录 I)，存在正数 ε，使得对于 $\{(z^1,\cdots,z^m)\mid|z^i|<\varepsilon,1\leqslant i\leqslant m\}\subset\varphi(U_1)$ 和任意给定的初值 $(y^2,\cdots,y^m)$，$|y^\alpha|<\varepsilon$ $(2\leqslant\alpha\leqslant m)$，方程(2.2.18)有唯一解

$$z^\alpha=\varphi^\alpha(z^1,y^2,\cdots,y^m),\quad |z^1|<\tilde{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}\leqslant\varepsilon),$$

它满足初始条件

$$y^\alpha=\varphi^\alpha(0,y^2,\cdots,y^m),\quad \alpha=2,\cdots,m.$$

作变量变换

$$z^1=y^1,\quad z^\alpha=\varphi^\alpha(y^1, y^2, \cdots, y^m),\quad \alpha=2, \cdots, m.$$

因 $\det\left.\dfrac{\partial(z^1, \cdots, z^m)}{\partial(y^1, \cdots, y^m)}\right|_{z^1=0}=1$，所以存在点 p 的一个邻域 $U\subset U_1$，以 $y^i(1\leqslant i\leqslant m)$ 为局部坐标，在此局部坐标系下

$$\begin{aligned}X|_U&=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}=\xi^1\frac{\partial}{\partial z^1}+\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\\&=\xi^1\left(\frac{\partial z^1}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^1}+\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)\\&=\xi^1\frac{\partial}{\partial y^1}.\end{aligned}$$

再作坐标变换

$$x^1=\int_0^{y_1}\frac{dy^1}{\xi^1},\quad x^\alpha=y^\alpha,\quad \alpha=2, \cdots, m.$$

即得 X 在包含 p 点的坐标图 $(U, \varphi; x^i)$ 中，有

$$X|_U=\frac{\partial}{\partial x^1}.\qquad ▮$$

设 X 和 Y 是 C^k 流形 M 上的任意二个 C^{k-1} 向量场，$k\geqslant 2$. 对任何 $f\in C^k(M)$，$Xf\in C^{k-1}(M)$，这里由定义 2.2.3,

$$Xf(p)=X_pf,\quad \forall p\in M.$$

故可对 Xf 继续用 Y 来作用，且 $Y(Xf)\in C^{k-2}(M)$. 因此对于给定的两个向量场 X、Y，可以定义映射 $[X, Y]:C^k(M)\to C^{k-2}(M)$ 如下：对任意的 $f\in C^k(M)$,

$$[X, Y]f=X(Yf)-Y(Xf).\tag{2.2.19}$$

利用局部坐标，设

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad X^i, Y^i\in C^{k-1}(M),$$

则有

$$[X, Y]f(x)=\sum_{i,j}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j}(x),\quad x\in\varphi(U).\tag{2.2.19$'$}$$

于是，$[X, Y]$为 M 的一个 C^{k-2} 向量场，它称为向量场 X 和 Y 的 Poisson 括号(积)或 Lie 括号(积). 由上式可见，$[X, Y]_p$不仅与 X_p、Y_p 有关，而且依赖于 X, Y 在 p 点邻域里的情况.

以 $\mathscr{X}^s(M)$表示 M 上 C^s 向量场的全体所组成的集合. 对任意的 $a, b\in \boldsymbol{R}$, X、$Y\in\mathscr{X}^s(M)$, 命

$$(aX+bY)f=aXf+bYf, \quad \forall f\in C^k(M),$$

则 $\mathscr{X}^s(M)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间. 由 Lie 括号的定义，即得映射 $[\ ,\ ]:\mathscr{X}^{k-1}(M)\times\mathscr{X}^{k-1}(M)\to\mathscr{X}^{k-2}(M)$. 它有下述性质:

(i) 反交换律:

$$[X, Y]=-[Y, X];$$

(ii) $\boldsymbol{R}$-双线性性:

$$[aX_1+bX_2, Y]=a[X_1, Y]+b[X_2, Y];$$

$$[X, aY_1+bY_2]=a[X, Y_1]+b[X, Y_2];$$

(iii) Jacobi 恒等式:

$$[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0.$$

前二个性质是明显的. 而性质(iii)，只要将下式

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]]f=&X(Y(Zf))-X(Z(Yf))\\&-Y(Z(Xf))+Z(Y(Xf))\end{aligned}$$

中 X, Y, Z 循环轮换，然后把得到的三式相加即得.

对于一个 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间(有限或无限维)，若能在其中引入某种"乘法"运算，满足反交换律、$\boldsymbol{R}$-双线性性以及 Jacobi 恒等式，则称之为一个(有限或无限维)实 Lie 代数.

以 $\mathscr{X}(M)$ 表示 M 上 C^∞ 向量场的全体，它构成 $\boldsymbol{R}$ 上的一个向量空间(一般是无限维的). 显然，可引入 Lie 括号$[\ ,\ ]$: $\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$作为"乘法"，因而得

定理 2.2.8 向量空间 $\mathscr{X}(M)$是一个实 Lie 代数.

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形. $f:M\to N$ 为 C^r 映

射. 我们已见到，对每一个点 $p\in M$, f 诱导了一个同态

$$f_*:T_p(M)\to T_{f(p)}(M),\quad f_*X_p\equiv f_{*p}X_p\in T_{f(p)}(N),\quad \forall X_p\in T_p(M).$$

若 X 是 M 上的向量场，则 f_*X_p 是 $T_{f(p)}(N)$ 的一个向量. 但这样的过程并不保证能诱导出 N 上的向量场. 其实，首先 f 未必为满映射，此外，也可能出现 $p_1\neq p_2$, $f(p_1)=f(p_2)$，而 $f_*X_{p_1}\neq f_*X_{p_2}$ 的情况. 但是，我们有下述定理:

定理 2.2.9 设 $\psi:M\to N$ 为 C^k 微分同胚. X 为 M 上 C^s $(s\leqslant k-1)$ 向量场，则 $Y=\psi_*X$，即

$$Y_{\psi(p)}=\psi_{*p}X_p,\quad \forall p\in M, \tag{2.2.20}$$

是 N 上的 C^s 向量场. 且对 M 上任意两个 C^s 向量场 X_1 和 X_2，有

$$\psi_*[X_1,X_2]=[\psi_*X_1,\psi_*X_2]. \tag{2.2.21}$$

证明 因为 $\psi:M\to N$ 是微分同胚. $Y_{\psi(p)}=\psi_{*p}X_p$. 故在每一点 $q\in N$, $Y_q\in T_q(N)$ 是唯一确定的. 因而 Y 是 N 上的一个向量场. 利用局部坐标，对 Y 的分量应用定理 2.2.5 的推论，即知它们都是 C^s 函数，从而 Y 也是 C^s 向量场.

对于任意的 $f\in C^k(N)$, $p\in M$, $q=\psi(p)\in N$，有

$$(\psi_*X)f|_q=(\psi_{*p}X_p)f=X_p(f\circ\psi)=X(f\circ\psi)|_p,$$

故得

$$\psi_*X(f)=X(f\circ\psi)\circ\psi^{-1}. \tag{2.2.22}$$

于是

$$\begin{aligned}
&[\psi_*X_1,\psi_*X_2]f\\
&=(\psi_*X_1)(X_2(f\circ\psi)\circ\psi^{-1})-(\psi_*X_2)(X_1(f\circ\psi)\circ\psi^{-1})\\
&=[X_1(X_2(f\circ\psi))-X_2(X_1(f\circ\psi))]\circ\psi^{-1}\\
&=[X_1,X_2](f\circ\psi)\circ\psi^{-1}=(\psi_*[X_1,X_2])f.\ \blacksquare
\end{aligned}$$

关系式(2.2.21)可在更一般的情况下成立，参阅本节习题 13.

定义 2.2.4 设 $\psi: M \to M$ 为 C^k 微分同胚，X 为 M 上的 C^s $(s \leqslant k-1)$ 向量场，如果对于任意的 $p \in M$，$\psi_* X = X$，即

$$\psi_* X_p = X_{\psi(p)}, \quad \forall p \in M,$$

则称向量场 X 在微分同胚 ψ 下是不变的.

2.3 单参数变换群

变换群在几何学中是十分重要的. 下面我们来讨论 C^k 流形上的单参数变换群. 它与流形上的向量场密切有关.

定义 2.2.5 设 M 为 m 维 C^k 流形. $\varphi: \boldsymbol{R} \times M \to M$ 为 C^r $(r \leqslant k)$ 映射，$(t, p) \mapsto \varphi(t, p)$，且记

$$\varphi(t, p) = \varphi_p(t) = \varphi_t(p). \tag{2.2.23}$$

如果 φ 满足下述条件：

（i）对任意的 $p \in M$，$\varphi_0(p) = p$；

（ii）对任意实数 $s, t \in \boldsymbol{R}$，$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$，则称 φ 为 $\boldsymbol{R}$ 在 M 上的（左）作用. 或称 $\{\varphi_t\}$ 为 M 上的 C^r 单参数变换群.

根据上述条件，$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$，$t \in \boldsymbol{R}$，所以对固定的每一个 $t \in \boldsymbol{R}$，$\varphi_t: M \to M$，$p \mapsto \varphi_t(p)$，是 M 到其自身的微分同胚.

定义 2.2.6 设 U 是 M 的开集，$I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$，$\varepsilon > 0$. 以 $I_\varepsilon \times U$ 替代定义 2.2.5 中的 $\boldsymbol{R} \times M$，且要求 $t, s, t+s \in I_\varepsilon$，则称 $\{\varphi_t\}$ 为由 U 到 M 的 C^r 局部单参数变换群. 对固定的 $p \in U$，$\varphi_p(t)$ $(t \in I_\varepsilon)$ 称为群过 p 点的轨线.

以 X_p 表示局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 的轨线 $\varphi_p(t)$ 在 p 点的切向量. 这样，就在 U 上定义了一个向量场 X. 显然，对于任意的 $p \in M$ 和任意的 $f \in C^k(U)$，有

$$X_p f = \left.\frac{d(f \circ \varphi_p(t))}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} (f \circ \varphi_{\Delta t}(p) - f(p)) / \Delta t. \tag{2.2.24}$$

设 $(0, p)\in I_\delta\times V$，这里 $I_\delta\times V$ 为 $I_\delta\times U$ 的开子集，使得 $V\subset W$，且 $\varphi(I_\delta\times V)\subset W\cap U$，而 $(W, \psi; x^i)$ 是 M 上含有 p 点的坐标图．将 φ 限制在 $I_\delta\times V$ 上，利用局部坐标，单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 可以表示成 $y=h(t, x)$，即

$$y^i=h^i(t; x^1, \cdots, x^m), \quad i=1, \cdots, m,$$

这里 $x=(x^1, \cdots, x^m)$ 是点 $q\in V$ 的坐标，而 $y=(y^1, \cdots, y^m)$ 是点 $\varphi_t(q)$ 的坐标．定义 2.2.5 中条件(i)和(ii)，用局部坐标可以表示成

$$h^i(0, x)=x^i,$$
$$h^i(s+t, x)=h^i(s, h(t, x))=h^i(t, h(s, x)).$$

于是有

$$X_pf=\dot{h}^i(0, x(p))\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p. \tag{2.2.25}$$

这里"$\cdot$"表示关于 t 的导数．由此即知 X 是 U 上 C^{r-1} 向量场．X 称为由 $\{\varphi_t\}$ 诱导的向量场．

定义 2.2.7 设 X 为流形 M 上的向量场，$C: I_\varepsilon\to M$ 为参数曲线．如果

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{C(t)}\equiv C_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t=X_{C(t)}, \tag{2.2.26}$$

则称曲线 C 为向量场 X 的一条积分曲线．

定理 2.2.10 设 X 为由局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 诱导的向量场，则它在每个 φ_t 下是不变的．且 $\{\varphi_t\}$ 的轨线都是向量场 X 的积分曲线．

证明 对于任何 $f\in C^k(U)$，由(2.2.24)，

$$((\varphi_t)_*X_p)f|_{\varphi_p(t)}=X_p(f\circ\varphi_t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\circ\varphi_t\circ\varphi_{\Delta t}(p)-f\circ\varphi_t(p)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\circ\varphi_{\Delta t}\circ\varphi_{t(p)}-f\circ\varphi_{t(p)}}{\Delta t}=X_{\varphi_t(p)}f,$$

即得 $(\varphi_t)_*X_p=X_{\varphi_t(p)}$，此即表示 X 在微分同胚 φ_t 下是不变的．

再设 $C: I_\varepsilon \to M$，$t \mapsto \varphi_p(t)$，这里 p 是 U 上任意固定的一点. 若 C 是$\{\varphi_t\}$的轨线，则有

$$C_*\left(\frac{d}{dt}\right)_t f = \frac{d}{dt}(f\circ C)|_t = \frac{d}{dt}(f\circ\varphi_p(t))$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{f\circ\varphi_{t+\Delta t}(p) - f\circ\varphi_t(p)\}$$

$$= X_{\varphi_p(t)}f.$$

故$\{\varphi_t\}$的轨线为向量场 X 的积分曲线. ∎

我们已证得一个 C^r 局部单参数变换群 $\varphi: I_\varepsilon\times U\to M$ 在 U 上诱导了一个 C^{r-1} 向量场 X，它由 φ 的轨线的切向量所构成. 反之，我们有

定理 2.2.11 设 X 是 C^k 流形 M 上 $C^{r-1}(r<k-1)$ 向量场，则对任一点 $p\in M$，存在 p 的一个邻域 U 和 U 到 M 的 C^r 局部单参数变换群 φ，使得在 U 上 X 是由 φ 诱导的向量场. 因而也称向量场 X 为 φ 的无穷小生成元.

证明 设在包含 p 点的坐标图$(V,\ \psi;\ x^i)$里，

$$X(x) = X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,\quad x\in\psi(V).$$

考虑常微分方程组

$$\frac{dh^i(t,\ x)}{dt} = X^i(h^1(t,\ x),\ \cdots,\ h^m(t,\ x)),\quad i=1,\ \cdots,\ m. \tag{2.2.27}$$

这里 t 为自变量，$x=(x^1,\ \cdots,\ x^m)$是参变量. 由常微分方程理论(见附录 I)，在 $t=0$ 的充分小邻域 I_ε 内，存在唯一的解$\{h^i(t,\ x)\}$ $(i=1,\ \cdots,\ m)$，使得满足初始条件 $h^i(0,x)=x^i$，且可取 $x\in\psi(U)$，使得$(h^1(t,\ x),\ \cdots,\ h^m(t,\ x))\in\psi(V)$，其中 $U\subset V$ 为 p 的充分小邻域. 由于向量场为 C^{r-1} 的，因此函数 $h^i(t,\ x)$至少是 C^r 的.

作 C^r 映射 $\varphi: I_\varepsilon\times U\to M$，$(t,\ p)\mapsto\varphi(t,\ p)=\varphi_t(p)$，使得其

局部表示为

$$\varphi_t(x(q))=(h^1(t,\ x(q)),\ \cdots,\ h^m(t,\ x(q))),$$
$$q\in U,\ t\in I_\varepsilon.$$

设 $s,\ t\in I_\varepsilon$，且 $s+t\in I_\varepsilon$，对于任意固定的 s，$h^i(t+s,\ x)$和 $h^i(t,\ \varphi_s(x))$都满足方程(2.2.27)，且具有相同的初始条件

$$h^i(0,\ \varphi_s(x))=h^i(0+s,\ x)=h^i(s,\ x).$$

由常微分方程组的唯一性定理，即知

$$h^i(t+s,\ x)=h^i(t,\ \varphi_s(x)),$$

即 $\varphi_{t+s}=\varphi_t\circ\varphi_s$. 特别 $\varphi_t\circ\varphi_{-t}=\varphi_0$ 为恒同映射. 因此 φ_t 为微分同胚，而 $\varphi: I_\varepsilon\times U\to M$ 为 C^r 局部单参数变换群.

对任意的 $f\in C^k(M)$和任意的 $p\in U$，由(2.2.27)，有

$$\left.\frac{d(f\circ\varphi_t(p))}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dh^i(t,\ x(p))}{dt}\right|_{t=0}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$$
$$=X^i(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p.$$

故 X 在 U 上是由 φ 诱导的向量场. ▌

利用定理 2.2.7，即得

推论 1 设 X 为 C^k 流形 M 上的 C^{k-1} 向量场，$X_p\neq 0$，则存在包含 p 点的坐标图$(V,\ \psi;\ x^i)$，使得由 X 生成的局部单参数变换群 φ 的作用是沿 x^1 曲线的平移. 即

$$\varphi_t(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^m)=(x^1+t,\ x^2,\ \cdots,\ x^m).$$

推论 2 设 M 为紧致 C^k 流形，X 为 M 上 C^{r-1} 向量场，则 X 在 M 上生成一个 C^r 单参数变换群.

证明 由上述定理，对每一点 $p\in M$，都有一个邻域 U_p 和正数 $\varepsilon_p>0$，使得 X 在 U_p 上生成局部单参数变换群 $\varphi^{(p)}: I_{\varepsilon p}\times U_p\to M$. 若 $U_p\cap U_q\neq\varnothing$，易见 $\varphi^{(p)}$ 和 $\varphi^{(q)}$ 在 $U_p\cap U_q$ 上的作用是相同的. 因为 M 是紧致的，$\{U_p|p\in M\}$ 具有有限子覆盖，设为 $\{U_1,\ \cdots,\ U_r\}$，且相应地有 $\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_r$. 令 $\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant a\leqslant r}\varepsilon_a$. 再定义映射

$\tilde{\varphi}: I_\varepsilon \times M \to M$ 如下：若 $p\in U_a$，有

$$\tilde{\varphi}_{t(p)}=\tilde{\varphi}(t,\ p)=\varphi_t^{(a)}(p),\quad t\in I_\varepsilon.$$

用下述方式延拓 $\tilde{\varphi}$ 成映射 $\varphi: \boldsymbol{R}\times M\to M$：对任何 $t\in \boldsymbol{R}$，必存在正整数 N，使得 $|t|/N<\varepsilon$，则定义

$$\varphi(t,\ p)=(\tilde{\varphi}_{t/N})^N(p),$$

右侧表示局部变换连续进行 N 次．显见它与 N 的选取无关．事实上，若正整数 N' 也使得 $|t|/N'<\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}\varphi(t,\ p)&=(\tilde{\varphi}_{t/N})^N(p)=\{(\tilde{\varphi}_{t/NN'})^{N'}\}^N(p)=(\tilde{\varphi}_{t/NN'})^{NN'}(p)\\&=\{(\tilde{\varphi}_{/N'N})^{N}\}^{N'}(p)=(\tilde{\varphi}_{t/N'})^{N'}(p).\end{aligned}$$

因此，$\varphi: \boldsymbol{R}\times M\to M$ 为 C^r 单参数变换群．▌

定理 2.2.12 设$\{\varphi_t\}$是 C^k 流形 M 上的 C^r 单参数变换群，X 是由$\{\varphi_t\}$诱导的 C^{r-1} 向量场．如果 $\psi: M\to M$ 是微分同胚，则 $\psi_* X$ 是 C^r 单参数变换群$\{\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}\}$诱导的向量场．

证明 令 $\lambda_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$，则有

$$\lambda_0=\varphi_0=I\quad(\text{恒同});$$

$$\lambda_{t+s}=\lambda_t\circ\lambda_s.$$

故$\{\lambda_t\}=\{\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}\}$为 M 上 C^r 单参数变换群．对任意的 $p\in M$ 和 $f\in C^k(M)$，设 $q=\psi(p)$，则

$$\begin{aligned}(\psi_* X_p)f&=X_p(f\circ\psi)=\frac{d}{dt}(f\circ\psi\circ\varphi_t(p))\big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}(f\circ\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}(q))\big|_{t=0}\\&=Y_q f=Y_{\psi(p)}f.\end{aligned}$$

这里 Y 是由单参数变换群$\{\lambda_t\}=\{\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}\}$诱导的向量场．▌

推论 向量场 X 在微分同胚 $\psi: M\to M$ 下为不变的充要条件是 X 生成的局部单参数变换群$\{\varphi_t\}$和 ψ 的作用是可交换的，即

$$\varphi_t\circ\psi=\psi\circ\varphi_t,\quad \forall t\in \boldsymbol{R}.\tag{2.2.28}$$

设 $\varphi: I_\varepsilon\times U\to M$ 是 C^r 局部单参数变换群，X 为 φ 在 U 上诱

导的向量场，设 Y 为 U 上任一向量场．选取 $\delta>0$ 和 U 的开子集 U_1，使得 $\varphi(I_\delta\times U_1)\subset U$．在 U_1 上，对 $t\in I_\delta$，定义向量场 W_t 如下：对于任意的 $f\in C^r(U_1)$，

$$W_t f=((\varphi_t)_* Y)f=Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}.$$

再用下式来定义向量场

$$Z_t f=\frac{dW_t}{dt}(f)=\frac{dW_t(f)}{dt},\qquad \forall f\in C^r(U_1).$$

命题 2.2.13 对于 $t\in I_\delta$，有

$$Z_t=\frac{dW_t}{dt}=[W_t,\ X].$$

证明 对于任意的 $f\in C^r(U_1)$，

$$\begin{aligned}
Z_t(f)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{W_{t+\Delta t}f-W_t f\}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{Y(f\circ\varphi_{t+\Delta t})\circ\varphi_{-(t+\Delta t)}-Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}\}\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{Y(f\circ\varphi_t\circ\varphi_{\Delta t})\circ\varphi_{-\Delta t}-Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-\Delta t}\\
&\quad+Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-\Delta t}-Y(f\circ\varphi_t)\}\circ\varphi_{-t}\\
&=Y\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{\Delta t}-(f\circ\varphi_t)}{\Delta t}\right)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\varphi_{-(t+\Delta t)}\\
&\quad+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-\Delta t}-Y(f\circ\varphi_t)}{\Delta t}\circ\varphi_{-t}\\
&=Y(X(f\circ\varphi_t))\circ\varphi_{-t}-X(Y(f\circ\varphi_t))\circ\varphi_{-t}\\
&=[Y,\ X](f\circ\varphi_t)\circ\varphi_{-t}=((\varphi_t)_*[Y,\ X])f.
\end{aligned}$$

故由(2.2.21)和定理 2.2.10，得

$$\frac{dW_t}{dt}=Z_t=[(\varphi_t)_*Y,\quad(\varphi_t)_*X]=[W_t,\ X].\ ▮$$

特别，由 W_t 的定义知 $W_0=Y$，故

$$Z_0=\left.\frac{dW_t}{dt}\right|_{t=0}=-[X,\ Y].$$

向量场 $-Z_0=[X,\ Y]$ 称为向量场 Y 关于向量场 X 的 Lie 导数，

记作 $\mathscr{L}_X Y$. 这样，我们有

定理 2.2.14 设 X 和 Y 是 C^k 流形 M 上两个 C^r 向量场，$\{\varphi_t\}$ 是由 X 生成的局部单参数变换群，则向量场 Y 关于向量场 X 的 Lie 导数

$$\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Y-(\varphi_t)_* Y\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{(\varphi_{-t})_* Y - Y\} = [X, Y], \quad (2.2.29)$$

这里第二个等号是将前式中的 t 用 $-t$ 代替而得.

对固定的 $p\in M$，$\varphi_p(t)\,(t\in I_\varepsilon)$ 是局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 过 p 点的轨线. 因为对于固定的 t, $\varphi_{-t}:\varphi_t(p)\to p$, 故 $(\varphi_{-t})_*: T_{\varphi_t(p)}(M)\to T_p(M)$ 为同构. 如果 Y 是定义在轨线 $\varphi_p(t)=\varphi_t(p)$ 上的向量场，则 $(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)}\,(t\in I_\varepsilon)$ 是切空间 $T_p(M)$ 中的一条曲线. (2.2.29) 式说明，这条曲线在 $t=0$ 处的切向量，即向量场 Y 沿 X 的积分曲线在 p 点的变化率，恰为 $[X, Y]_p=(\mathscr{L}_X Y)_p$.

推论 设 X 和 Y 是 C^k 流形 M 上两个 C^r 向量场，$\{\varphi_t\}$ 是由 X 生成的局部单参数变换群，则 Y 在 φ_t 作用下不变的充要条件是

$$\mathscr{L}_X Y = 0. \quad (2.2.30)$$

证明 设向量场 Y 在 φ_t 作用下是不变的，即 $(\varphi_t)_* Y = Y_{\varphi_t(p)}$. 于是，对任意的 $p\in M$,

$$(\mathscr{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Y-(\varphi_t)_* Y\}_p = 0.$$

反之，若 $\mathscr{L}_X Y=0$, 即 $[X, Y]=0$, 由定理 2.2.9 和 2.2.10,

$$0=(\varphi_t)_*[X, Y]=[X, (\varphi_t)_* Y].$$

由此，对任意的 $p\in M$ 和 $f\in C^k(M)$, 有

$$0=[X, (\varphi_t)_* Y]_p f = (\mathscr{L}_X(\varphi_t)_* Y)_p f$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\{(\varphi_t)_* Y-(\varphi_{t+\Delta t})_* Y\}_p f$$

$$=\frac{d}{dt}((\varphi_t)_*Y)f, \quad \forall t\in I_\varepsilon.$$

故$((\varphi_t)_*Y)_pf$与t无关. 因为当$t=0$时, $((\varphi_0)_*Y)_pf=Y_pf$, 故

$$((\varphi_t)_*Y)_pf=Y_pf.$$

由于p和f的任意性, 即得$(\varphi_t)_*Y=Y$. ∎

2.4 分布 Frobenius定理 叶状结构

先推广流形上向量场的概念.

定义2.2.6 设M为m维C^k流形. 若对每一点$p\in M$, 都指定切空间$T_p(M)$的一个l维子空间$\mathscr{D}^l(p)\subset T_p(M)$, 则$\mathscr{D}^l=\bigcup_{p\in M}\mathscr{D}^l(p)$构成切丛$TM$的一个子丛, 称为$M$上的$l$维分布, 或称$M$上的$l$维切子丛. 若对每一点$p\in M$, 都有一个邻域$U$及其上$l$个$C^r$向量场$X_1, \cdots, X_l$, 使得在任何点$q\in U$, $X_1(q), \cdots, X_l(q)$是子空间$\mathscr{D}^l(q)$的一组基, 则称$\mathscr{D}^l$为l维C^r分布, 且称$X_1, \cdots, X_l$为$\mathscr{D}^l$在U上的一组局部基(向量场), 或称$X_1, \cdots, X_l$在U上生成$\mathscr{D}^l$. 设$i(W)$是M的浸入子流形, 其中$i:W\to M$为包含映射. 如果对每一点$p\in W$都有$i_*(T_p(W))\subset\mathscr{D}^l(i(p))$, 则称$i(W)$为$\mathscr{D}^l$的积分流形.

显见, 当$l=1$时, C^r分布$\mathscr{D}^1$即为M上C^r向量场, 因此分布是向量场概念的一个推广, 而向量场的积分曲线, 正是它作为一维分布时的积分流形. 由定理2.2.7, 若C^{k-1}向量场X无奇点, 则对每一点p, 存在一个坐标邻域(U, x^i), 使得限制在U上, $X|_U=\frac{\partial}{\partial x^1}$, 即其积分曲线为$x^1$-参数曲线, 也即$x^\alpha=c^\alpha(\alpha=2, \cdots, m)$, c^α均为常数.

定义2.2.7 设$\mathscr{D}^l$为m维C^k流形M上的l维C^{k-1}分布, 如果对每一点$p\in M$, 都存在包含p的坐标图$(U, \varphi; x^i)$, 使得

$$U_c=\{q\in U\,|\,x^\alpha(q)=c^\alpha(c^\alpha\text{为任意常数})\,l+1\leqslant\alpha\leqslant m\}$$

都是 $\mathscr{D}^l$ 的积分流形，则称分布 $\mathscr{D}^l$ 是**完全可积的**.

可见，若 $\mathscr{D}^l$ 为完全可积，则对每一点 $p\in M$，都存在一个 l 维积分流形. 此外，上述条件等价于 $\mathscr{D}^l$ 在 U 上是由 $\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^l}$ 生成的，而此时

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^a},\ \frac{\partial}{\partial x^b}\right]=0,\quad 1\leqslant a,\ b\leqslant l.$$

更一般些，我们给出

定义 2.2.8 设 $\mathscr{D}^l$ 是 m 维 C^k 流形 M 上的 l 维 C^{k-1} 分布. 若对每一点 $p\in M$，都存在一个邻域 U 和在 U 上生成 $\mathscr{D}^l$ 的 l 个 C^{k-1} 向量场 $X_1,\ \cdots,\ X_l$，使对任意点 $q\in U$，都有

$$[X_a,\ X_b]_q\in\mathscr{D}^l(q),\quad 1\leqslant a,\ b\leqslant l,$$

则称分布 $\mathscr{D}^l$ 是**对合的**.

显然，定义中的条件等价于

$$[X_a,\ X_b]=C^c_{ab}X_c,\quad 1\leqslant a,\ b,\ c\leqslant l,\tag{2.2.31}$$

而且 $\mathscr{D}^l$ 的对合性质是与 $\mathscr{D}^l$ 在 U 上的一组局部基向量场的选取无关. 显然，如果分布 $\mathscr{D}^l$ 是完全可积的，则 $\mathscr{D}^l$ 是对合的.

引理 1 设 C^r 分布 $\mathscr{D}^l$ 是对合的，则对每一点 $p\in M$，都存在 p 的一个邻域 U 及在 U 上生成 $\mathscr{D}^l$ 的 l 个 C^r 向量场 $X_1,\ \cdots,X_l$，使得 $[X_a,\ X_b]=0,\ 1\leqslant a,\ b\leqslant l.$

证明 设 $\mathscr{D}^l$ 是对合的，$(U,\ \varphi;\ x^i)$ 是包含 p 点的坐标图，且 U 选得充分小，使得 C^r 向量场 $Y_1,\ \cdots,\ Y_l$ 在 U 上生成 $\mathscr{D}^l$. 设

$$Y_a=Y^i_a\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y^i_a\in C^r(U),\quad 1\leqslant a\leqslant l,\ 1\leqslant i\leqslant m.$$

因为矩阵 $(Y^i_a)_{l\times m}$ 的秩为 l，不失一般性，可设 $A=(Y^b_a)_{l\times l}$ 的秩为 l. 令 $B=(\beta^b_a)=A^{-1}$，且取

$$X_a=\beta^b_aY_b=\frac{\partial}{\partial x^a}+\sum_{s=l+1}^{m}\lambda^s_a\frac{\partial}{\partial x^s},\quad \lambda^s_a\in C^r(U),\quad 1\leqslant a\leqslant l.$$

直接计算得

$$[X_a, X_b]=\sum_{s=l+1}^{m}\mu_{ab}^s\frac{\partial}{\partial x^s},\quad 1\leqslant a,\ b\leqslant l,\ \mu_{ab}^s\in C^r(U).$$

另一方面，$X_1, \cdots, X_l$ 也在 U 上生成 $\mathscr{D}^l$，而 $\mathscr{D}^l$ 是对合的，故由(2.2.31)有

$$[X_a, X_b]=\nu_{ab}^c\left(\frac{\partial}{\partial x^c}+\sum_{s=l+1}^{m}\lambda_c^s\frac{\partial}{\partial x^s}\right),\quad 1\leqslant a,\ b,\ c\leqslant l.$$

比较以上两式，即得 $\nu_{ab}^c=0$，即

$$[X_a, X_b]=0,\quad 1\leqslant a,\ b\leqslant l.$$

为了便于应用，将定理 2.2.12 的推论和定理 2.2.14 的推论合并且写成下述

引理 2 设 $\varphi, \sigma: I_\varepsilon\times U\to M$ 均为 C^k 局部单参数变换群，它们分别由 C^{k-1} 向量场 X 和 Y 生成，则 $\varphi_t\circ\sigma_s=\sigma_s\circ\varphi_t$ 成立当且仅当 $[X, Y]=0$.

当然，这里 t, $s\in I_\delta\subset I_\varepsilon$，且 $q\in V\subset U$，以使得 $\sigma_s(q)\in U$，$\varphi_t(q)\in U$.

定理 2.2.15(Frobenius 定理) C^k 流形 M 上 C^{k-1} 分布 $\mathscr{D}^l$ 为完全可积的充分必要条件是 $\mathscr{D}^l$ 是对合的.

证明 必要性是显然的，只需证充分性，即要证明：若 $\mathscr{D}^l$ 是对合的，则 $\mathscr{D}^l$ 是完全可积的. 由引理 1，对每一点 $p\in M$，有一个邻域 U 及 $\mathscr{D}^l$ 在其上的 C^{k-1} 基向量场 $X_1, \cdots, X_l$，使得 $[X_a, X_b]=0$，$1\leqslant a$，$b\leqslant l$，故可设存在包含 p 点的坐标图 $(U, \psi; x^i)$，使得 $x^i(p)=0$，$i=1, \cdots, m$，并且 $(X_1)_p, \cdots, (X_l)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^{l+1}}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ 是线性无关的. 令

$$\varphi^{(a)}: I_\varepsilon\times U'\to M,\quad U'\subset U$$

是在 U' 上由 X_a 生成的 C^k 局部单参数变换群，$a=1, \cdots, l$，再定义一个映射 $\lambda: \Omega=\{x\in \mathbf{R}^m \mid |x^i|<\delta\}\to M$ 为

$$\lambda(t_1, \cdots, t_l, x^{l+1}, \cdots, x^m)$$
$$=\overset{(1)}{\varphi}_{t_1}\circ\overset{(2)}{\varphi}_{t_2}\circ\cdots\circ\overset{(l)}{\varphi}_{t_l}\circ\psi^{-1}(0, \cdots, 0, x^{l+1}, \cdots, x^m).$$

只要 δ 充分地小，这是完全确定的．因为 $\varphi^{(1)}$ 在 U' 上诱导 X_1，故对任意的 $f\in C^\infty(U')$，

$$\frac{\partial(f\circ\lambda)}{\partial t_1}(0)=(X_1)_pf.$$

因为 $[X_a, X_b]=0$，由引理 2，$\overset{(a)}{\varphi}_t\circ\overset{(b)}{\varphi}_s=\overset{(b)}{\varphi}_s\circ\overset{(a)}{\varphi}_t$，故又有

$$\frac{\partial(f\circ\lambda)}{\partial t_a}=(X_a)_pf, \quad a=1, \cdots, l,$$

即
$$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial t_a}\right)_0=(X_a)_p, \quad a=1, \cdots, l.$$

此外，因为 $\lambda(0, \cdots, 0, x^{l+1}, \cdots, x^m)=\psi^{-1}(0, \cdots, 0, x^{l+1}, \cdots, x^m)$，故

$$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_0=\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_p\in T_p(M), \quad s=l+1, \cdots, m.$$

于是映射 $\lambda:\Omega\to M$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 的原点的秩为 m．根据反函数定理，当 δ 充分小时，λ 是 Ω 与 M 的一个开子集 $\tilde{U}$ 的微分同胚．由 λ 的定义，在包含 p 点的坐标图 $(\tilde{U}, \lambda^{-1})$ 中，$\lambda_*\left(\frac{\partial}{\partial t_a}\right)=X_a(a=1, \cdots, l)$．因此，$\tilde{U}$ 中子流形

$$\{q\in\tilde{U}\,|\,x^s(q)=c^s\ (c^s\text{为常数}), l+1\leqslant s\leqslant m\}$$

是 $\mathscr{D}^l$ 的积分流形，即 $\mathscr{D}^l$ 是完全可积的．▌

在本章§3.2中，我们将给出 Frobenius 定理的另一种表达形式．

为了给出 Frobenius 定理的整体性描述，我们先引入一个新概念．

定义 2.2.9 设 M 是 m 维光滑流形，M 上的一个 $l(<m)$ 维叶状结构 $\mathscr{F}$ 是指 M 的一个 l 维连通子流形的集合 $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$，其中每个 $\mathscr{F}_\alpha$ 称为 $\mathscr{F}$ 的叶，它们满足下列条件：

（i）M 的每点都位于 $\mathscr{F}$ 的某个叶上；

（ii）对于每点 $p\in M$，存在 p 的一个坐标图 $(U, \varphi; x^i)$，使得对于每张叶 $\mathscr{F}_\alpha$，$U\cap\mathscr{F}_\alpha$ 的连通分支可表为

$$\{q\in U\cap\mathscr{F}_\alpha \mid x^s(q)=c^s,\ c^s \text{ 为常数}, l+1\leqslant s\leqslant m\},$$

它称为 U 的叶片．

M 上光滑向量场的积分曲线的全体就是 M 的 1 维叶状结构．

叶状结构的另一个例子可以从一个光滑淹没 $f: M\to N$ 得出．设 $\dim N=m-l$，则每点 $q\in f(M)$ 的逆像 $f^{-1}(q)$ 是 M 的 l 维正则子流形（定理 2.1.5 的推论）．因此，N 的逆像 $f^{-1}(N)$ 定义了 M 的一个 l 维叶状结构．由定义 2.2.9 可知，从局部来说，一个叶状结构可看成由某个淹没所诱导．

定理 2.2.16 设 $\mathscr{D}$ 是 m 维光滑流形 M 上的一个完全可积的 l 维光滑分布，则 $\mathscr{D}$ 的最大积分流形的全体确定了 M 的一个 l 维叶状结构．

证明 根据定理 2.2.15 的证明过程，对于每点 $p\in M$，都存在 p 的一个坐标图 $(U, \varphi; x^i)$，使得

$$\{q\in U \mid x^s(q)=c^s(c^s \text{ 为常数}), l+1\leqslant s\leqslant m\} \quad (2.2.32)$$

是 $\mathscr{D}$ 的 l 维积分流形的局部表示．于是，M 可以被这样的坐标图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$ 所覆盖．

设 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，$\Sigma$ 是 U_α 的一张叶片，则 Σ 可能与 U_β 的若干张叶片相交．由于 M 具有可数拓扑基，$\Sigma\cap U_\beta$ 最多包含可数多个分支，每个分支位于 U_β 的由(2.2.32)定义的叶片内．因此，$\Sigma\cap U_\beta$ 位于 U_β 的可数多张叶片内．

给定点 $p\in M$，选取 p 的上述坐标图 $(U_0, \varphi_0; x_0^i)$．设 Σ_0 是 U_0 中过 p 的叶片．对于 U_α 的一张叶片 Σ，若存在序列

$$0=\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k=\alpha,$$

且存在对应的$U_{\alpha_t}(t=0, 1, \cdots, k)$的叶片

$$\sum_0=\sum_{\alpha_0}, \sum_{\alpha_1}, \cdots, \sum_{\alpha_k}=\sum,$$

使得
$$\sum_{\alpha_t}\cap\sum_{\alpha_{t+1}}\neq\varnothing, \quad t=0, \cdots k-1,$$

则称叶片$\sum$是与点p相连接的．显然，最多存在可数多个与p相连接的叶片．这可数多个叶片的并仍是M的一个l维子流形，我们称之为与p连接的$\mathscr{D}$的最大积分流形．

对于另一点$q\in M$，$q\neq p$，它所连接的$\mathscr{D}$的最大积分流形，或者与p连接的$\mathscr{D}$的最大积分流形重合或者两者完全不相交．这样，所有不相交的$\mathscr{D}$的最大积分流形(M的l维子流形)的全体便成为M的一个l维叶状结构．▌

习　题

1．证明命题 2.2.4．

2．证明(2.2.14)式及定理 2.2.5 的推论．

3．设M和N均为C^k流形，$f:M\to N$为C^s映射．$q\in f(M)$．如果f在每个$p\in f^{-1}(q)$上均为满射，则有

$$T_p\{f^{-1}(q)\}=\mathrm{Ker}(f_{*p}).$$

4．设$f:M\to N$为C^k流形间的C^s映射，Z是N中余维数为k的正则子流形，$p\in M$．如果$f(p)\overline{\in}Z$，或者当$f(p)\in Z$时有

$$f_{*p}(T_p(M))+T_{f(p)}(Z)=T_{f(p)}(N),$$

则称f在点p是横截于Z的．如果对每点$p\in M$，f都是与Z横截的，则称f与Z横截．现设$f(p)\in Z$，试证：

(i) f在点p横截于Z的充要条件为：存在M中含p的邻域U和N中含$q=f(p)$的子流形图(V, ψ)，使得$f(U)\subset V$且$\pi\circ\psi\circ f:U\to\boldsymbol{R}^k$在$p$点是淹没，其中$\pi:\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{n-k}\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^k$是自然投影；

(ii) $T_p\{f^{-1}(Z)\}=f_{*p}^{-1}(T_{f(p)}(Z))$．

5．设X为C^k流形N上的C^{k-1}向量场，M为N的正则子流形．证明：如果对每一点$p\in M$，$X_p\in T_p(M)$，则X限制到M上也是M上的C^{k-1}向量场．

6．设C^∞流形$M\subset N$为闭正则子流形．证明：M上C^∞向量场X能拓广为C^∞流形N上的C^∞向量场．

7．设$f, g\in C^\infty(M)$，$X, Y\in \mathscr{X}(M)$，$[\ ,\ ]$为 Lie 括号．证明

$$[fX, gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X, Y].$$

8．证明定理 2.2.12 的推论．

9．设$\{\varphi_t\}$为 M 上局部单参数群．证明：它可延拓为整体的单参数变换群$\varphi: \boldsymbol{R}\times M\to M$(参考定理 2.2.11 的推论 2 的证明)．

10．设$\varphi(t, x, y)=(xe^{2t}, ye^{-3t})$，证明：$\{\varphi_t\}$是 $\boldsymbol{R}^2$ 上C^∞的单参数群，并求出它的诱导向量场．

11．设$X=y\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial y}$为 $\boldsymbol{R}^2$ 上 C^∞ 向量场．求一单参数变换群$\{\varphi_t\}$，使向量场 X 为 φ 的无穷小生成元．

12．设 X 为由局部单参数变换群$\{\varphi_t\}$诱导的向量场，Γ_p 为过 p 点的轨线．证明：

1° 如果 $X_p=0$，则 $X_q=0$，对于任意 $q\in\Gamma_p$．

2° 若 $X_p\neq 0$，则 $\varphi_p: I_\varepsilon\to M$，$t\mapsto\varphi_p(t)$，为浸入．若 $X_p=0$，则 $\varphi_p: I_\varepsilon\to M$ 为常值映射．

13．设 M、N 为 C^k 流形，$F: M\to N$ 为 C^k 映射．X，Y 分别为 M 和 N 上的 C^{k-1} 向量场．如果对于每个点 $q\in F(M)$和 $p\in F^{-1}(q)\subset M$，均有

$$F_*X_p=Y_q,$$

则称向量场 X 和 Y 是 F-**相关的**．简记成 $Y=F_*X$．证明：

1° X 和 Y 为 F-相关的充要条件是对 N 上任何 C^k 函数 g，都有

$$(Yg)\circ F=X(g\circ F);$$

2° X_a 和 $Y_a(a=1, 2)$是 F-相关的．则 $F_*[X_1, X_2]=[Y_1, Y_2]$；

3° 设 X 和 Y 是 F-相关的，则 X 的积分曲线被映成 Y 的积分曲线；

4° X 和 Y 为 F-相关的充要条件是由 X 和 Y 分别生成的局部单参数变换群$\{\theta_t\}$和$\{\sigma_t\}$，对于任何使下式两侧都有意义的 $t\in I$，$p\in M$，满足

$$F\circ\theta_t(p)=\sigma_t\circ F(p).$$

14．设$\varphi, \sigma: I_\varepsilon\times U\to M$ 均为 C^k 局部单参数变换群．它们分别由 C^{k-1} 向量场 X 和 Y 生成．证明：$[X, Y]=0$ 当且仅当 $\varphi_t\circ\sigma_s=\sigma_s\circ\varphi_t$．这里 t，$s\in I_\varepsilon$，$p\in M$ 应使等式的两侧都有意义．

15．如果对于每个点 $p\in M$，$X_p\in\mathscr{D}_p$，则称向量场 X 属于分布 $\mathscr{D}$．证明：$\mathscr{D}$ 为对合的充要条件是对于属于 $\mathscr{D}$ 的任何两个向量场 X，Y，向量场 $[X, Y]$也属于 $\mathscr{D}$．

§3 张 量 场

3.1 张量场

设 M 为 m 维 C^k 流形，$p\in M$，$T_p(M)$ 为 M 在 p 点的切空间．以 $T^r_{s,p}(M)$ 表示向量空间 $T_p(M)$ 上的 (r, s) 型张量空间，并令

$$T^r_s(M)=\bigcup_{p\in M}T^r_{s,p}(M).$$

设 $(U, \varphi; x^i)$ 为 M 的任一个坐标图，则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, 1\leqslant i\leqslant m\right\}$ 是 $T_p(M)$ 的一组自然基，$\{(dx^i)_p, 1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 $T^*_p(M)$ 上的对偶基．于是 $\Phi_p\in T^r_{s,p}(M)$ 可表示为

$$\Phi_p=\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\otimes(dx^{j_1})_p\otimes\cdots\otimes(dx^{j_s})_p.$$

记
$$\widetilde{U}=\{\Phi_p\in T^r_{s,p}(M)\,|\,p\in U\},$$
且定义映射
$$\widetilde{\varphi}:\widetilde{U}\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^{m^{s+r}},$$
$$\Phi_p\mapsto(x^i(p), \Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}),\quad 1\leqslant i, i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s\leqslant m.$$
对于任意的开集 $A\subset\varphi(U)$，$B\subset\boldsymbol{R}^{m^{s+r}}$，定义
$$\widetilde{\varphi}^{-1}(A\times B)\subset T^r_s(M)$$
为 $T^r_s(M)$ 的开子集．此外，自然地有映射
$$\pi:T^r_s(M)\to M,\quad \Phi_p\mapsto p.$$

使用以上记号，仿照定理 2.2.6，我们有

定理 2.3.1 设 M 为 m 维 C^k 流形，则在 $T^r_s(M)$ 上存在一个拓扑，使得对 M 的每一个坐标图 (U, φ)，$\widetilde{U}=\pi^{-1}(U)$ 为 $T^r_s(M)$ 的开集，$\widetilde{\varphi}:\widetilde{U}\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^{m^{s+r}}$ 为同胚，且坐标图册 $\{(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})\}$ 决定了 $T^r_s(M)$ 上的一个 C^{k-1} 微分结构，使得 $T^r_s(M)$ 为 $m+m^{s+r}$ 维 C^{k-1} 微分流形．

$(T^r_s(M), \pi, M)$ 称为 M 上 (r, s) 型张量丛．$T^r_s(M)$ 称为全空间，M 为基空间，π 称为投影，$T^r_{s,p}(M)$ 称为纤维，有时也简单

地称$T^r_s(M)$为 M 上(r, s)型张量丛.

特别，$\wedge^r T^*_p(M)$是 $T_p(M)$上的 r 阶反称共变张量空间，再令

$$\wedge^r T^*(M)=\bigcup_{p\in M}\wedge^r T^*_p(M),$$

则它有一个自然的 C^{k-1} 微分结构，使之成为 $m+\binom{m}{r}$ 维 C^{k-1} 流形. $\wedge^r T^*(M)$称为 M 上 r **次外微分形式丛**，或简称 r **次形式丛**.

现在可推广向量场的概念如下.

定义 2.3.1 C^k 流形 M 上的一个(r, s)型**张量场** Φ 是一个映射 $\Phi: M\to T^r_s(M)$，使得 $\pi\circ\Phi=I$. 这里 I 表示恒同映射，即 $\Phi: p\mapsto\Phi_p\in T^r_{s,p}(M)$. 一个$(r, s)$型张量场也称为 M 上(r, s)型张量丛 $T^r_s(M)$的一个**截面**.

显见，$(1, 0)$型张量场即为 M 上(反变)向量场，$(0, 1)$型张量场即为共变向量场.

设$(U, \varphi; x^i)$是 M 的一个坐标图，(r, s)型张量场 Φ 局部地可表成

$$\Phi(x)=\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x)\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}. \tag{2.3.1}$$

如果在每一个坐标图上，$\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x)$均为 C^k 的，$1\leqslant i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s\leqslant m$，则称 Φ 是 C^k **张量场**. 显见，Φ 的 C^k 性质与局部坐标系的选择无关. 此外，Φ 的分量在不同坐标系 x^i 和 $x^{i'}$ 中的变换公式为

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x')=\Phi^{h_1\cdots h_r}_{k_1\cdots k_s}(x)\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{h_1}}\cdots\frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{h_r}}\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x'^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_s}}{\partial x'^{j_s}}. \tag{2.3.2}$$

定义 2.3.2 设 M 为 C^k 流形，$\wedge^r(T^*(M))$为M 上 r 次形式丛，它的截面称为 M 上的 r **次外微分形式**，或简称 r **次形式**. 用 $A^r(M)$表示 M 上所有 r 次 $C^{k'}(k'\leqslant k)$外微分形式所组成的空间. 特别，$A^0(M)=C^{k'}(M)$. 令

$$A(M)=\sum_{r=0}^{m}\oplus A^r(M),$$

它的元素称为**外微分形式**，$A(M)$称为**外微分形式空间**.

显然，每一个外微分形式 $\omega\in A(M)$ 可表成

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\cdots+\omega_m,\quad \omega_r\in A^r(M)\ (0\leqslant r\leqslant m).$$

外代数中的外积运算 $\wedge$ 可推广到外微分形式空间 $A(M)$上. 设 $\omega,\ \sigma\in A(M)$，则对所有的 $p\in M$，定义

$$(\omega\wedge\sigma)(p)=\omega(p)\wedge\sigma(p).$$

空间 $A(M)$关于加法，数乘和外乘积构成一个分层代数. 这里外乘是映射 $\wedge: A^s(M)\times A^t(M)\to A^{s+t}(M)$.

设 $\omega\in A^r(M)$，则利用局部坐标可表成(参考(1.2.27)′)

$$\begin{aligned}\omega&=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant m}a_{i_1\cdots i_r}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\\&=\frac{1}{r!}a_{j_1\cdots j_r}(x)dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_r},\quad 1\leqslant j_1,\ \cdots,\ j_r\leqslant m.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形. $f:M\to N$ 为 C^k 映射，则 f 诱导了映射 $f_*:T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$ 及 $f^*:T^*_{f(p)}(N)\to T^*_p(M)$. 我们已经知道，若 X 为 M 上的向量场，则当 p 取遍 M 时，f_*X 未必构成 N 上的向量场，下面讨论映射 f^* 的性质. 我们用下述方法定义映射 $f^*:T^0_s(N)\to T^0_s(M)$，$\psi\mapsto f^*\psi$.

若 $s=0$，即 $\psi\in C^k(N)$，则 $f^*\psi=\psi\circ f$;

若 $s>0$，令 $(f^*\psi)_p=f^*(\psi_{f(p)})$. 即对每一个 $\psi\in T^0_s(N)$和任意的 $X_1,\ \cdots,\ X_s\in T_p(M)$，有

$$(f^*\psi)_p(X_1,\ \cdots,\ X_s)=\psi_{f(p)}(f_*X_1,\ \cdots,\ f_*X_s).\tag{2.3.4}$$

映射 f^* 称为**拉回(映射)**. 对于拉回映射 f^* 有下述性质.

定理 2.3.2 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维 C^k 流形，$f:M\to N$ 为 C^k 映射，若 ω 为 N 上 $C^r s$-形式($r\leqslant k-1$)，则 $f^*\omega$ 是 M 上

$C^r s$-形式. 特别, 若 θ 为 N 上的 C^r 共变向量场, 则 $f^*\theta$ 是 C^r 共变向量场.

证明 设$(U, \varphi; x^i)$和$(V, \psi; y^\alpha)$分别为 M 和 N 的坐标图, 且$f(U)\subset V$. 映射 f 在局部坐标系中由下式给定

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad f^\alpha \in C^k(\varphi(U)), \quad \alpha=1, \cdots, n.$$

由(2.3.3), ω 在局部坐标系中可表成

$$\omega(y) = \sum_{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_s\leq n} b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(y) dy^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dy^{\alpha_s}, \quad y\in f(U),$$

其中 $b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}\in C^r(V)$. 由映射 f^* 的线性性及(1.2.36), (2.2.14), 得

$$\begin{aligned}(f^*\omega)(x) &= \sum_{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_s\leq n} b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(f(x))(f^*dy^{\alpha_1})\wedge\cdots\wedge(f^*dy^{\alpha_s}) \\ &= \sum_{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_s\leq n} b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(f(x))\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_s}}{\partial x^{i_s}} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s} \\ &= \sum_{\substack{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_s\leq n \\ 1\leq i_1<\cdots<i_s\leq m}} b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(f(x)) \det\frac{\partial(y^{\alpha_1}\cdots y^{\alpha_s})}{\partial(x^{i_1}\cdots x^{i_s})}(x) dx^{i_1} \\ &\quad \wedge\cdots\wedge dx^{i_s}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

由于映射 f 是 C^k 的, 故 $b_{\alpha_1\cdots\alpha_s}(f(x))\det\dfrac{\partial(y^{\alpha_1}\cdots y^{\alpha_s})}{\partial(x^{i_1}\cdots x^{i_s})}(x)$ 是 C^r 的 $(r\leq k-1)$, 即表示 $f^*\omega$ 是 M 上的 $C^r s$-形式. ▌

最后, 不难证明 $f^*: A(N)\to A(M)$为代数的同态, 这里若 $\sigma\in A(N)$, $\sigma=\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_n$, 其中 $\sigma_r(0\leq r\leq n)$为 r 次微分形式, 则定义

$$f^*\sigma = f^*\sigma_0 + f^*\sigma_1+\cdots+f^*\sigma_n.$$

3.2 外微分

为简单起见, 以下设 M 为 m 维 C^∞ 流形, $A(M)$为 M 上 C^∞ 外微分形式空间. 今在 $A(M)$上引入外微分运算.

定义 2.3.3 设映射 $d: A^r(M)\to A^{r+1}(M)$满足下述条件:

(i) d 是 $\boldsymbol{R}$-线性的;

(ii) 若 $f\in A^0(M)\equiv C^\infty(M)$, 则 df 为 f 的普通微分, 且 $d(df)=0$;

(iii) 若 $\omega\in A^r(M)$, $\sigma\in A(M)$, 则

$$d(\omega\wedge\sigma)=d\omega\wedge\sigma+(-1)^r\omega\wedge d\sigma. \tag{2.3.6}$$

再把 d 线性扩张到整个 $A(M)$ 上, 则称映射 $d: A(M)\to A(M)$ 为**外微分算子**. 简称为**外微分**.

在证明外微分算子 d 的存在和唯一性之前, 我们先来给出外微分的一个性质.

引理 外微分 d 是一个局部算子, 即设 ω_1, $\omega_2\in A(M)$, 且两者在 M 的开集 U 上相等, 则 $d\omega_1$ 和 $d\omega_2$ 限制在 U 上也相等.

证明 由定义 2.3.3 的条件(i), 只需证明: 若 $\omega|_U=0$, 则 $d\omega|_U=0$. 对任一点 $p\in U$, 由于流形的局部紧致性, 可选取 p 点的邻域 V, 使 $V\subset\overline{V}\subset U$, 且 $\overline{V}$ 是紧致的. 由定理 2.1.1, 在 M 上存在 C^∞ 函数 f, 使得在 V 上 $f=1$, 在 M-U 上 $f=0$, 于是在 M 上 $f\omega\equiv0$, 由定义 2.3.3 的条件(iii), 有

$$df\wedge\omega+fd\omega=0.$$

因为 $\omega(p)=0$, $f(p)=1$, 因此 $(d\omega)_p=0$. 由于 p 的任意性, 得 $d\omega|_U=0$. ▮

定理 2.3.3 外微分算子 d 是存在且唯一的.

证明 先证唯一性. 根据 d 的线性性及引理, 只要在局部坐标系中对单项式进行证明即可. 设在坐标图 $(U, \varphi; x^i)$ 中

$$\omega=fdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\quad f\in C^\infty(U),$$

且设 d_1, d_2 是两个外微分算子. 因为 $x^i\in C^\infty(U)$, 故由定义 2.3.3 中条件(iii), 有 $d^2x^i=0$. 再根据(iii), 可见

$$d_1\omega=df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}=d_2\omega.$$

由 ω 的任意性, 即得 $d_1=d_2$.

再证存在性. 先在每个局部邻域 U 内进行考虑. 设

$$\omega|_U=\begin{cases} f \text{ 或} \\ a_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \ f,\ a_{i_1\cdots i_r}\in C^\infty(U), \end{cases}$$

定义

$$d(\omega|_U)=\begin{cases} df \text{ 或} \\ da_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \end{cases} \tag{2.3.7}$$

则定义 2.3.3 中条件(i)和(ii)是满足的. 为了证明定义 2.3.3 中条件(iii)成立, 同样仅需对两个单项式加以证明即可. 设

$$\omega=adx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\quad \sigma=b\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s},\quad a,\ b\in C^\infty(U),$$

由(2.3.7)可知

$$\begin{aligned} d(\omega\wedge\sigma)&=d(ab)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s}\\ &=(da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r})\wedge(bdx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s})\\ &\quad+(-1)^r(adx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r})\wedge(db\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_s})\\ &=d\omega\wedge\sigma+(-1)^r\omega\wedge d\sigma. \end{aligned}$$

再证明上述定义的 d 在整个 M 上都有定义. 设(W,ψ)为另一坐标图, $U\cap W\neq\varnothing$. 由于外微分算子的局部性及在局部坐标邻域内的唯一性, 有

$$d(\omega|_U)_{U\cap W}=d(\omega|_{U\cap W})=d(\omega|_W)_{U\cap W}.$$

所以由(2.3.7)式定义的 d 在 $U\cap W$ 上是一致的, 即 d 是在流形 M 上整体定义的. 这就证明了满足定义条件的算子 d 的存在性. ▌

一般地, 设

$$\begin{aligned} \omega&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\\ &=\frac{1}{r!}\,\omega_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} d\omega&=\sum_{i_1<\cdots<i_r}d\omega_{i_1\cdots i_r}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\\ &=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$= \frac{1}{r!}\frac{\partial\omega_{i_2\cdots i_{r+1}}}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}}\left\{\frac{1}{r!}\sum_\sigma(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{\partial\omega_{i_{\sigma(2)}\cdots i_{\sigma(r+1)}}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}\right\}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r+1}}. \tag{2.3.8}$$

定理 2.3.4(Poincaré 引理)

$$d^2=0, \tag{2.3.9}$$

即对任意的外微分形式 $\omega\in A(M)$, $d(d\omega)=0$.

证明 因为 d 是 $\boldsymbol{R}$-线性的,故只要对 ω 的每一个单项进行证明即可. 又根据引理,外微分 d 是局部算子,故只需在一个坐标图 $(U,\ \varphi;\ x^i)$ 中加以讨论. 因此不妨设

$$\omega = a dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\qquad a\in C^\infty(U).$$

由(2.3.7)式,有

$$d\omega = da\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

再微分一次,利用(2.3.6)及 $d(da)=0$, $d(dx^i)=0$, 即得

$$d(d\omega)=0. \blacksquare$$

下面给出 Poincaré 引理在古典向量分析中的应用. 设 $(x,\ y,\ z)$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的笛卡儿直角坐标. $f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$. $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$. df 的系数构成的向量场是 f 的梯度场

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

设 $\omega\in\wedge^1(\boldsymbol{R}^3)$. $\omega=A\,dx+B\,dy+C\,dz$, 则

$$d\omega=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$
$$+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

若向量场 $X=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$, 则 $d\omega$ 的系数构成的向量场是 X 的旋度场

$$\operatorname{curl} X=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

设 $\varphi\in\wedge^2(\boldsymbol{R}^3)$, $\varphi=A\,dy\wedge dz+B\,dz\wedge dx+C\,dx\wedge dy$, 则

$$d\varphi=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz,$$

这时 $d\varphi$ 的系数为向量场 X 的散度

$$\operatorname{div} X=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}.$$

由 Poincaré 引理, $d(df)=0$, $d(d\omega)=0$, 可以给出古典场论的两个基本公式

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} X)=0.$$

定理 2.3.5 设 $\omega\in A^r(M)$, 则对于 M 上任意的向量场 $Y_1, \cdots, Y_{r+1}$, 有

$$\begin{aligned}
&d\omega(Y_1, \cdots, Y_{r+1})\\
&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}Y_i(\omega(Y_1, \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, Y_{r+1}))\\
&\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i, Y_j], Y_1, \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_{r+1}).
\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

证明 由于上式中两侧的映射都是线性的, 故只需对单项加以证明即可. 不失一般性, 设

$$\omega=a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^r,\qquad a\in C^\infty(M),$$

则

$$d\omega=da\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^r.$$

根据 r 次外微分形式的性质, 有

$$\omega(Y_1, \cdots, Y_r)=a\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)Y_1(x^{\sigma(1)})\cdots Y_r(x^{\sigma(r)})$$
$$=a\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)Y_{\sigma(1)}(x^1)\cdots Y_{\sigma(r)}(x^r)$$
$$=a\det(Y_k(x^l))_{1\leqslant k,l\leqslant r}.$$

$$d\omega(Y_1, \cdots, Y_{r+1})$$
$$=\sum_{\tau\in\varphi(r+1)}(\operatorname{sgn}\tau)Y_{\tau(1)}(a)Y_{\tau(2)}(x^1)\cdots Y_{\tau(r+1)}(x^r)$$
$$=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}Y_i(a)\{\det_{k\neq i}(Y_k(x^l))_{\substack{1\leqslant k\leqslant r+1\\1\leqslant l\leqslant r}}\}.$$

对于(2.3.10)式的右侧,因为

$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}Y_i(\omega(Y_1, \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, Y_{r+1}))$$
$$=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}Y_i(a\det_{k\neq i}(Y_k(x^l)))$$
$$=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\{Y_i(a)\det_{k\neq i}(Y_k(x^l))+aY_i(\det(Y_k(x^l)))\},$$

而

$$\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}aY_i(\det_{k\neq i}(Y_k(x^l)))$$
$$=a\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}Y_i\{\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)Y_1(x^{\sigma(1)})\cdots$$
$$Y_{i-1}(x^{\sigma(i-1)})Y_{i+1}(x^{\sigma(i)})\cdots Y_{r+1}(x^{\sigma(r)})\}$$
$$=a\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\sum_{\sigma\in\varphi(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)\{\sum_{1\leqslant j\leqslant i-1}Y_1(x^{\sigma(1)})$$
$$\cdots Y_iY_j(x^{\sigma(j)})\cdots Y_{i-1}(x^{\sigma(i-1)})Y_{i+1}(x^{\sigma(i)})\cdots Y_{r+1}(x^{\sigma(r)})$$
$$+\sum_{i+1\leqslant j\leqslant r}Y_1(x^{\sigma(1)})\cdots Y_{i-1}(x^{\sigma(i-1)})Y_{i+1}(x^{\sigma(i)})\cdots$$
$$Y_iY_j(x^{\sigma(j-1)})\cdots Y_{r+1}(x^{\sigma(r)})\}$$
$$=a\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i-1}\{\sum_{1\leqslant j\leqslant i-1}(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^r)(Y_1, \cdots, Y_iY_j, \cdots$$
$$Y_{i-1}, Y_{i+1}, \cdots, Y_{r+1})$$

$$+\sum_{i+1\leqslant j\leqslant r}(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^r)(Y_1,\ \cdots,\ Y_{i-1},\ Y_{i+1},\ \cdots,$$

$$Y_i,\ Y_j,\ \cdots,\ Y_{r+1})\}$$

$$=-a\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^r)$$

$$\cdot(Y_iY_j-Y_jY_i,\ Y_1,\ \cdots,\ \hat{Y}_i,\ \cdots,\ \hat{Y}_j,\ \cdots,\ Y_{r+1})$$

$$=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,\ Y_j],\ Y_1,\ \cdots,\ \hat{Y}_i,\ \cdots,$$

$$\hat{Y}_j,\ \cdots,\ Y_{r+1}).$$

由以上计算，即得出公式(2.3.10). ■

推论 对于$\omega\in A^1(M)$，X，$Y\in\mathscr{X}(M)$，我们有

$$d\omega(X,\ Y)=X(\omega(Y))-Y(\omega(X))-\omega([X,\ Y]).\tag{2.3.10′}$$

设M和N分别为m维和n维C^k流形．$f:M\to N$是C^k映射．对于诱导映射$f^*:A(N)\to A(M)$，由定理1.2.12，f^*与外积$\wedge$是可交换的，下面我们可以证明f^*和外微分d也是可交换的．

定理2.3.6 设$f:M\to N$是微分流形间的可微映射，则诱导映射f^*和外微分d是可交换的，即对于任意的$\omega\in A(N)$，有$f^*\circ d_N\omega=d_M\circ f^*\omega$，简单地表成

$$f^*\circ d=d\circ f^*,\tag{2.3.11}$$

即有下述交换图表

$$\begin{array}{ccc}A(N) & \xrightarrow{f^*} & A(M)\\ \downarrow d_N & & \downarrow d_M\\ A(N) & \xrightarrow{f^*} & A(M)\end{array}$$

证明 由于f^*和d都是线性映射，故只需对单项式ω进行论证．先设$\omega\in A^0(N)$，X为M上的向量场，则

$$f^*\circ d_N\omega(X)=d_N\omega(f_*X)=(f_*X)\omega=X(\omega\circ f)$$

$$=X(f^*\omega)=d_M\circ f^*\omega(X).$$

故有 $$f^*\circ d_N\omega=d_M\circ f^*\omega.$$

再设 $\omega=hdg$, h, $g\in C^\infty(N)$, 则由上式及定理 1.2.12, 有

$$f^*\circ d_N\omega=f^*(dh\wedge dg)=f^*d_Nh\wedge f^*d_Ng=d_Mf^*h\wedge f^*d_Ng$$
$$=d_M((f^*h)f^*\circ d_Ng)=d_M\circ f^*(hd_Ng)=d_M\circ f^*\omega.$$

现使用归纳法. 假定对于次数小于 r 的微分形式, (2.3.11) 式均成立. 设 ω 为 r 次单项微分形式, 不妨设 $\omega=\omega_1\wedge\omega_2$. 其中 ω_1 为 1 次微分形式, ω_2 为 $r-1$ 次微分形式. 由归纳假设

$$f^*\circ d_N\omega=f^*(d_N\omega_1\wedge\omega_2)-f^*(\omega_1\wedge d_N\omega_2)$$
$$=d_Mf^*\omega_1\wedge f^*\omega_2-f^*\omega_1\wedge d_Mf^*\omega_2$$
$$=d_M(f^*\omega_1\wedge f^*\omega_2)=d_Mf^*\omega.$$

定理得证. ▮

定义 2.3.4 设 M 为 m 维流形. 对于 $\omega\in A^r(M)$, 若 $d\omega=0$, 则称 ω 是闭的. 若存在一个 $\sigma\in A^{r-1}(M)$, 使得 $\omega=d\sigma$, 则称 ω 是恰当的.

由定理 2.3.3 可知, 恰当形式 $\omega=d\sigma$ 必为闭形式. 我们自然要问, 一个闭形式是否必为恰当形式? 回答是否定的. 例如, 定义在 $M=\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ 上的 1- 形式

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

容易验证 $d\omega=0$, 但它在 M 上不是恰当的.

设 $\omega\in A^r(M)$. 如果对于任何 $p\in M$, 存在包含 p 的开集 U_p, 使得

$$\omega|_{U_p}=d\sigma,\quad \sigma\in A^{r-1}(U_p),$$

则称 ω 为局部恰当的. 我们有

定理 2.3.7 ω 是闭形式的充分必要条件是 ω 是局部恰当的.

以上的定理证明是基于下述的一个引理.

Poincaré 引理　如果 $M\subset \boldsymbol{R}^m$ 是包含 O 点的星形状开集（即对于任何 $x\in M$，从 O 到 X 的直线段包含在 M 中），则在 M 上的每一个闭形式是恰当的.

证明　定义映射 $I_r: A^r(M)\to A^{r-1}(M)$，$\omega\mapsto I_r\omega$ 如下：

设
$$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\omega_{i_1\cdots i_r}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

$$I_r\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)dt\right)\cdot x^{i_\alpha}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

由于 M 是星形状开集，故上述定义有意义. 对于这个映射，有性质
$$d(I_r(\omega))+I_{r+1}(d\omega)=\omega.$$

事实上
$$\begin{aligned}d(I_r(\omega))=&\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}r\left(\int_0^1 t^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)dt\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\\&+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{\alpha-1}\\&\cdot\left(\int_0^1 t^r\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)dt\right)\\&\cdot x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},\end{aligned}$$

而
$$d\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(x)dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}.$$

因此
$$\begin{aligned}I_{r+1}(d\omega)=&\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\sum_{j=1}^{m}\left(\int_0^1 t^r\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)dt\right)\\&\cdot\Big[x^jdx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}-\sum_{\alpha=1}^{r}(-1)^{\alpha-1}x^{i_\alpha}dx^j\\&\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\Big].\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}&d(I_r(\omega))+I_{r+1}(d\omega)\\&=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m}\left\{\int_0^1\left(rt^{r-1}\omega_{i_1\cdots i_r}(tx)+\sum_{j=1}^{m}t^r\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_r}}{\partial x^j}(tx)x^j\right)dt\right\}\\&\quad\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}\end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^r \omega_{i_1 \cdots i_r}(tx) dt \right) \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \omega_{i_1 \cdots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \omega.$$

由以上等式，当 ω 为闭形式，即 $d\omega = 0$ 时，有

$$\omega = d(I_r(\omega)),$$

即 ω 为恰当形式. ▌

将 $A^r(M)$ 看作加群，$d = d_r : A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 定义了一个同态. 记

$$Z^r(M, \boldsymbol{R}) = \{\omega \in A^r(M) \mid d\omega = 0\} = d_r \text{ 的核}.$$

$$B^r(M, \boldsymbol{R}) = \{\omega \in A^r(M) \mid \omega = d\sigma,\ \sigma \in A^{r-1}(M)\}$$
$$= d_{r-1} \text{ 的象}.$$

$Z^r(M, \boldsymbol{R})$ 和 $B^r(M, \boldsymbol{R})$ 分别为 r 次闭微分形式和 r 次恰当微分形式所构成的群. 因为 $d^2 = 0$，故

$$B^r(M, \boldsymbol{R}) \subset Z^r(M, \boldsymbol{R}).$$

商群
$$H^r(M, \boldsymbol{R}) = Z^r(M, \boldsymbol{R}) / B^r(M, \boldsymbol{R})$$

称为流形 M 上的第 r 个 de Rham 上同调群. $H^r(M, \boldsymbol{R})$ 中的元素称为 r 次上同调类. 显然

$$[\omega_1] = [\omega_2] \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 + d\sigma, \quad \sigma \in A^{r-1}(M).$$

下面，我们不加证明地叙述流形理论中一个重要的定理.

De Rham 定理 设 M 是紧致定向的 C^∞ 流形，则 M 的第 r 个 de Rham 上同调群 $H^r(M, \boldsymbol{R})$ 与 M 的第 r 个拓扑上同调群 $H^r(M)$ 是同构的. 即

$$H^r(M, \boldsymbol{R}) \cong H^r(M).$$

上式的左边由 M 的微分结构所决定，而右边则由 M 的拓扑所决定. 所以 de Rham 定理建立了流形的几何性质与拓扑性质之间的联系. 由上述定理还可看出，由同一个拓扑流形 M 的两个不同微分结构所决定的 de Rham 上同调群是同构的. 这方面的

理论在第三章§4中还要作进一步的讨论.

现在我们来给出 Frobenius 定理的另一种表述. 设 $X_1, \cdots, X_l$ 是分布 $\mathscr{D}^l$ 在 U 上的一组局部基向量场. 补充 $X_{l+1}, \cdots, X_m$ 使之构成 U 上的标架场. 设 1 次微分形式 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m$ 是与 $X_1, \cdots, X_m$ 对偶的. 因此, $\mathscr{D}^l$ 限制在 U 上可定义成

$$\mathscr{D}^l(p)=\{X\in T_p(M)\mid \varphi^t(p)(X)=0,\ l+1\leqslant t\leqslant m\},\quad p\in U,$$

也即 $\varphi^{l+1}, \cdots, \varphi^m$ 在 $\mathscr{D}^l|_U$ 上均消失, 所以在 U 上分布 $\mathscr{D}^l$ 等价于 1 次微分形式方程组

$$\varphi^t=0,\quad l+1\leqslant t\leqslant m, \tag{2.3.12}$$

它也称为 Pfaff 方程组.

因为 $X_1, \cdots, X_m$ 为标架场, 故

$$[X_i, X_j]=\lambda_{ij}^h X_h,\quad 1\leqslant i, j, h\leqslant m.$$

因此, 分布 $\mathscr{D}^l$ 为对合的充要条件是

$$\lambda_{ab}^t=0,\quad 1\leqslant a, b\leqslant l,\quad l+1\leqslant t\leqslant m.$$

因为 $\varphi^1, \cdots, \varphi^m$ 与 $X_1, \cdots, X_m$ 是对偶的, 故根据定理 2.3.5 的推论,

$$d\varphi^t(X_i, X_j)=-\varphi^t([X_i, X_j])=-\lambda_{ij}^t,$$
$$1\leqslant i, j\leqslant m,\ l+1\leqslant t\leqslant m.$$

另一方面, 可设

$$d\varphi^t=\frac{1}{2}C_{ij}^t\varphi^i\wedge\varphi^j,\quad C_{ji}^t=-C_{ij}^t,\quad 1\leqslant i, j\leqslant m,\ l+1\leqslant t\leqslant m,$$

从而

$$d\varphi^t(X_i, X_j)=C_{ij}^t,$$

故得 $C_{ij}^t=-\lambda_{ij}^t$. 于是, $\mathscr{D}^l$ 是对合的, 当且仅当

$$d\varphi^t=\sum_{s=l+1}^m\left\{\sum_{a=1}^l C_{as}^t\varphi^a+\sum_{r=l+1}^m\frac{1}{2}C_{rs}^t\varphi^r\right\}\wedge\varphi^s,$$

也即

$$d\varphi^t\equiv 0 \bmod (\varphi^{l+1}, \cdots, \varphi^m). \tag{2.3.13}$$

若存在局部坐标系 $\{x^i\}$, 使得子流形

$$\{x\in U\mid x^t=\text{const.},\ l+1\leqslant t\leqslant m\}$$

适合 Pfaff 方程组 $\varphi^t=0(l+1\leqslant t\leqslant m)$，则称它是完全可积的. 此时分布 $\mathscr{D}^l$ 局部地恰好是由 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^l}$ 张成的，且其逆亦真. 这样，§ 2.4 中的 Frobenius 定理可叙成

定理 2.3.7 Pfaff 方程组 $\omega_\alpha=0(\alpha=1, \cdots, r)$ 完全可积的充要条件是：$d\omega_\alpha=0(\alpha=1, \cdots, r)$ 是 Pfaff 方程组的代数推论.

3.3 黎曼度量

定义 2.3.5 设 M 为 m 维 C^k 流形. 如果在 M 上存在一个 $(0, 2)$ 阶对称正定的 C^k 张量场 g，使得对于任意点 $p\in M$，切空间 $T_p(M)$ 可看作具有度量 g_p 的欧氏向量空间，则 (M, g) 称为 m 维 C^k 黎曼流形. g 称为黎曼流形 M 的黎曼度量或基本张量.

设 (M, g) 为黎曼流形. 对于任意的 $X, Y\in\mathscr{X}(M)$，令

$$g(X, Y)(p)=g_p(X_p, Y_p),$$

则有 $g(X, Y)=g(Y, X)$ 及 $g(X, X)\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $X=0$. 使用坐标图 $(U, \varphi; x^i)$，则局部地有

$$g=g_{ij}(x)dx^i\otimes dx^j, \quad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad g_{ij}=g_{ji}. \tag{2.3.14}$$

在坐标变换 $\bar{x}^i=\bar{x}^i(x)$ 下，

$$\bar{g}_{ij}=g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}, \quad \bar{g}_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i}, \frac{\partial}{\partial\bar{x}^j}\right). \tag{2.3.15}$$

特别，如果 $e_1, \cdots, e_m$ 是 M 上局部正交规范标架场，即

$$g(e_i, e_j)=\delta_{ij}, \tag{2.3.16}$$

则有

$$g=\sum_{i=1}^m \omega^i\otimes\omega^i, \tag{2.3.17}$$

这里 $\omega^1, \cdots, \omega^m$ 是 $e_1, \cdots, e_m$ 的对偶场.

显然，$\boldsymbol{R}^3$ 中的曲面 S：$(u, v)\mapsto(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$\in \boldsymbol{R}^3$关于其诱导度量 $ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ 是一个 2 维黎曼流形$(S,\ g)$. 这里 $g=Edu\otimes du+2Fdu\otimes dv+Gdv\otimes dv$.

下面我们来证明黎曼度量的整体存在性.

定理 2.3.8 在 C^k 流形 M 上,可整体地定义 C^k 黎曼度量.

证明 设$\{U_\alpha,\ \varphi_\alpha;\ V_\alpha\}$为 M 的正则覆盖. $\{f_\alpha\}$是附属于它的 C^k 单位分解. 于是 $\varphi_\alpha: U_\alpha\to B^m_{3r}(0)$为微分同胚. 设 $\tilde{g}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$上通常的欧氏度量, 则 $g_\alpha=\varphi_\alpha^*\tilde{g}$ 是 U_α 上的一个 C^k 二阶对称正定共变张量场,从而是 U_α 上的一个 C^k 黎曼度量. 这样, $f_\alpha g_\alpha$ 是在 V_α 上的一个黎曼度量,且在 $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{B}^m_{2r}(0))$外消失. 因此可将它拓广成在整个 M 上的 C^k 二阶对称共变张量场. 它在 $\varphi_\alpha^{-1}(\overline{B}^m_{2r}(0))$ 外为零张量, 但在 V_α 上是正定的. 因为同类型对称张量场的和仍然是对称的,又因

$$g_p(X_p,\ Y_p)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}f_\alpha(p)g_\alpha(X_p,\ Y_p),$$

$$p\in M,\ X_p,\ Y_p\in T_p(M),$$

右侧和式中的每一项 $f_\alpha g_\alpha$ 已在整个 M 上有意义, 且在 $p\in M$ 的一个邻域里除去有限项外均为零,故上式定义的 $g=\sum\limits_\alpha f_\alpha g_\alpha$ 是 M 上二阶对称共变张量场. 现来证明 g 也是正定的, 因为 $f_\alpha\geqslant 0$ $(\alpha=1,\ 2,\ \cdots)$且每一点 $p\in M$至少包含在一个V_β中,使得$f_\beta(p)>0$, 故由 $0=g_p(X_p,\ X_p)=\sum\limits_\alpha f_\alpha(p)g_\alpha(X_p,\ X_p)$, 必有 $g_\beta(X_p,\ X_p)=0$, 即

$$0=\varphi_\beta^*\tilde{g}(X_p,\ X_p)=\tilde{g}(\varphi_{\beta*}X_p,\ \varphi_{\beta*}X_p).$$

由于 $\tilde{g}$ 是正定的,故 $\varphi_{\beta*}X_p=0$, 因为 $\varphi_\beta: U_\beta\to B^m_{3r}(0)$为微分同胚,故 $X_p=0$. ▌

在黎曼流形$(M,\ g)$上,对 M 的各点 p, 切空间 $T_p(M)$是欧氏向量空间. 故可考虑向量的长度及两向量之间的夹角等几何量, 设 X, Y 为 M 上向量场,则

$$\langle X, Y\rangle(p)=g(X, Y)(p)=g_p(X_p, Y_p) \quad (2.3.18)$$

称为向量场 X 和 Y 的**内积**.

$$\|x\|=\langle X, X\rangle^{1/2} \quad (2.3.19)$$

称为向量场 X 的**长度**. 而 X 和 Y 之间的夹角 θ 由下式给定

$$\cos\theta=\langle X, Y\rangle/\|X\|\cdot\|Y\|, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi. \quad (2.3.20)$$

设 $C:[a, b]\to M$, $t\mapsto C(t)$, 为 M 上 C^1 曲线, 则积分

$$L_C=\int_a^b\|\dot{C}\|dt=\int_a^b[g_{C(t)}(\dot{C}(t), \dot{C}(t))]^{1/2}dt,$$

$$\dot{C}=\frac{dC}{dt}=C_*\left(\frac{d}{dt}\right) \quad (2.3.21)$$

与参数的选取无关, 它称为曲线 C 的**弧长**.

使用局部坐标, 且局限在一个坐标图$(U, \varphi; x^i)$内时, 有

$$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j, \quad X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\varphi\circ C(t)=(x^1(t), \cdots, x^m(t)), \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

于是有

$$\langle X, Y\rangle=g_{ij}X^iY^j, \quad (2.3.18')$$

$$\cos\theta=g_{ij}X^iY^j/(g_{ij}X^iX^j)^{1/2}(g_{ij}Y^iY^j)^{1/2}, \quad (2.3.20')$$

$$s(t)=\int_0^t\left(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right)^{1/2}dt, \quad 0\leqslant t\leqslant L_C, \quad (2.3.21')$$

这使得我们常把黎曼度量局部地写成

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j=g_{ij}dx^i\otimes dx^j, \quad (2.3.22)$$

后者是为了强调其张量性质.

现设 M 是连通的, 则可推得它是弧连通的. 事实上, 对任何 $p\in M$, 以 S_p 表示 M 上与 p 点道路相连的所有点的集合. 因为 M 是局部欧氏的, 故 S_p 为开集. 如果存在另一个点 $q\in M$, 它不能与 p 道路相连, 那末就有两个不相交的开集 S_p, S_q, 最终使得 M 可表成两个不相交的开集的并. 而这是不可能的. 进而, M 的任

意两个点 p 和 q 可成为一条分段可微的曲线的两个端点. 这是因为 p 和 q 间的一条连续曲线被有限个坐标图所覆盖，而在每一个坐标图内，连接两个点的连续曲线可用可微曲线来代替.

以 $\mathscr{D}$ 表示 M 上所有连接 p, q 的分段可微曲线的集合. 相仿地，可用(2.3.21′)计算这种曲线的长度. 用下式来定义 M 上 p, q 两点间的距离:

$$d(p, q)=\inf_{C\in\mathscr{D}}\{L_C\}. \tag{2.3.23}$$

定理 2.3.9 C^k 黎曼流形 (M, g) 上由距离 d 确定的度量拓扑与 M 作为流形的拓扑是等价的.

证明 首先证明 d 是一个度量，使得流形 M 为度量空间. 由 d 的定义(2.3.23)，即知它是对称的，非负的. 因为 p 到 r 和 r 到 q 两条曲线相连得到 p 到 q 的一条曲线，而后者的长度为前二条的长度之和，故 $d(p, q)\leqslant d(p, r)+d(r, q)$. 最后还得证明如果 $d(p, q)=0$，则 $p=q$.

设 $p\in M$，取包含 p 的坐标图 $(U, \varphi; x^i)$，使得 $\varphi(p)=(0, \cdots, 0)$，且对固定的一个 a_0，$\overline{B}_{a_0}(0)\subset\varphi(U)$. 这里 $\overline{B}_{a_0}(0)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中以原点为中心，a_0 为半径的开球的闭包. 度量张量 g 的分量 $g_{ij}(x)=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x)$ 均为 C^k 函数，且 (g_{ij}) 对 $\varphi(U)$ 中每一点是对称的正定矩阵，记 $D_r=\{x\in\boldsymbol{R}^m \mid \|x\|\leqslant r(<a_0)\}$，$S^{m-1}=\{\alpha=(\alpha^1, \cdots, \alpha^m)\in\boldsymbol{R}^m \mid \sum_i(\alpha^i)^2=1\}$，则函数 $D_r\times S^{m-1}\to\boldsymbol{R}$:

$$(x, \alpha)\mapsto(g_{ij}(x)\alpha^i\alpha^j)^{1/2}$$

在紧致集 $D_r\times S^{m-1}$ 上有最大值 M_r 和最小值 m_r. 再以 M 和 m 表示对应于 $r=a_0$ 时的最大和最小值. 则

$$0<m\leqslant m_r\leqslant(g_{ij}(x)\alpha^i\alpha^j)^{1/2}\leqslant M_r\leqslant M, \quad x\in D_r.$$

据此，对任意的 $\beta=(\beta^1, \cdots, \beta^m)\in\boldsymbol{R}^m$，有

$$0<m\|\beta\|<m_r\|\beta\|<(g_{ij}(x)\beta^i\beta^j)^{1/2}\leqslant M_r\|\beta\|\leqslant M\|\beta\|,$$
$$\|\beta\|=\sum_i(\beta^i)^{2})^{1/2}.$$

设 $C:[0,\ b]\to\varphi^{-1}(\bar{B}_r(0))(\subset U)$ 为分段可微曲线. $p=C(0)$, $q=C(b)$. 它的长度为 $L=\int_0^b(g_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t))^{1/2}dt$. 注意到 $\|\varphi(q)\|$ 是 R^m 中连接 $\varphi(p)=(0,\ \cdots,\ 0)$ 和 $\varphi(q)$ 点的线段的长度, 而 $\int_0^b(\sum_i(\dot{x}^i)^2)^{1/2}dt$ 是 R^m 中连接这两点的曲线 $\varphi\circ C(t)$ $(0<t<b)$ 的长度, 故由上述不等式即得

$$0<m\|\varphi(q)\|<m_r\|\varphi(q)\|\leqslant m_r\int_0^b(\sum_i(\dot{x}^i)^2)^{1/2}dt<L$$
$$<M_r\int_0^b(\sum_i(\dot{x}^i)^2)^{1/2}dt\leqslant M\int_0^b(\sum_i(\dot{x}^i)^2)^{1/2}dt. \qquad (2.3.24)$$

现来证明命题: 若 $d(p,\ q)=0$, 则 $p=q$. 即证明若 $p\neq q$, 则 $d(p,\ q)\neq 0$. 设 q 是 M 上异于 p 的任一点, 不妨设它即为所述曲线 C 的端点, 即 $C(b)=q$. 对于 q, 存在某个 $r_0(<a_0)$, 使得 $q\overline{\in}\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$. 再设 $q'=C(b')$ 是曲线 C(从 p 点起始)与闭包 $\overline{\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))}$ 的边界的第一个交点, 即 $C([0,\ b'))\subset\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$, $C(b')\overline{\in}\varphi^{-1}(B_{r_0}(0))$. 故 q' 是曲线 C 上使 $\|\varphi(q')\|=r_0$ 的第一个点, 以 L' 表示曲线段 $C(t)\ (0\leqslant t\leqslant b')$ 的长度, 则由(2.3.24) $mr_0<L'\leqslant L$. 据此, 即知 $d(p,\ q)\geqslant mr_0>0$, 即若 $q\neq p$, 则有 $d(p,\ q)\neq 0$.

为了证明由 d 给定的度量拓扑与 M 上的流形拓扑是等价的, 只需证明 p 点的每个邻域 $V_r=\varphi^{-1}(B_r(0))$ 包含度量拓扑下的一个 ε-球: $S_\varepsilon(p)=\{q\in M\,|\,d(p,\ q)<\varepsilon\}$, 且反之亦然. 设 $r_0\leqslant a_0$, 选取 ε_0, 使得 $\varepsilon_0/m<r_0$, 则有 $S_{\varepsilon_0}(p)\subset V_{r_0}$. 因为若 $q\overline{\in}V_{r_0}$, 则据以上所述必有 $d(p,\ q)\geqslant mr_0>\varepsilon_0$. 故 $q\overline{\in}S_{\varepsilon_0}(p)$. 反之, 对于度量拓扑下的 ε_0 球邻域 $S_{\varepsilon_0}(p)$, 选取 $r_0<\min\left(a_0,\ \frac{\varepsilon_0}{M}\right)$, 对任一点 $q\in$

$V_{r_0}(p)$, $\varphi(q)=(\beta^1, \cdots, \beta^m)$. 令 $C:[0, 1]\to V_{r_0}$ 是由 p 到 q 的一条曲线，它的局部坐标表示为 $x^i=\beta^i t (i=1, \cdots, m)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 故其长度

$$L=\int_0^1 (g_{ij}(\beta^k t)\beta^i\beta^j)^{1/2}dt$$
$$\leqslant M(\sum_i(\beta^i)^2)^{1/2}\leqslant Mr_0<s_0.$$

从而有 $d(p, q)<s_0$, 即 $q\in S_{s_0}(p)$, 故 $V_{r_0}\subset S_{s_0}(p)$. ∎

如果在定义 2.3.5 中的 g 虽然不是正定的，但是对称、非退化的，即 $g_{ij}=g_{ji}$ 且 $\det(g_{ij})\neq 0$, 则 (M, g) 称为**广义黎曼流形**(或伪黎曼流形). 这类流形的一个例子是 Minkowski 空间 L^m, 它具有 Lorentz 度量

$$ds^2=(dx^1)^2-(dx^2)^2-\cdots-(dx^m)^2.$$

习　题

1. 以 $r=1$, $s=2$ 为例，证明定理 2.3.1.

2. 设 ψ 为 C^k 流形 M 上的 s 阶共变张量场. 证明: ψ 为 C^r $(r\leqslant k-1)$ 的充要条件是对于任意 C^{k-1} 向量场 $X_1, \cdots, X_s$, $\psi(X_1, \cdots, X_s)\in C^r(M)$.

3. 设 $f:M\to N$ 为 C^k 流形间的 C^k 映射. ψ_1, ψ_2 分别为 N 上 s_1 阶, s_2 阶 $C^r(r\leqslant k-1)$ 共变张量场. 证明: $f^*(\psi_1\otimes\psi_2)$ 为 M 上 s_1+s_2 阶 C^r 共变张量场，且

$$f^*(\psi_1\otimes\psi_2)=f^*\psi_1\otimes f^*\psi_2.$$

4. 设 M 为 C^k 流形, $\mathscr{X}^r(M)$ 为 M 上 $C^r(r\leqslant k-1)$ 向量场组成的向量空间. 若映射

$$\theta:\underbrace{\mathscr{X}^r(M)\times\cdots\times\mathscr{X}^r(M)}_{l}\to C^r(M)$$

是 l 重线性的，则称 θ 为 $(0, l)$ 型 C^r 场张量. 证明: M 上的 $(0, l)$ 型 C^r 张量场是 $(0, l)$ 型 C^r 场张量; 反之, M 上的 $(0, l)$ 型 C^r 场张量亦是 $(0, l)$ 型张量场.

5. 设 $\omega^1, \cdots, \omega^s$ 为 C^k 流形 M 上 $C^r(r\leqslant k-1)$ 的 1 次形式，证明

$$d(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^s)=\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}\omega^1\wedge\cdots\wedge d\omega^i\wedge\cdots\wedge\omega^s.$$

6．证明：(1) $A(M)$ 中的闭形式的集合是 $\boldsymbol{R}$ 上子代数，且恰当形式的全体为其理想.

(2) 设 $f:M\to N$ 为 C^∞ 映射，则 f^* 将闭形式映为闭形式，恰当形式映为恰当形式.

7．设 $X\in\mathscr{X}(M)$，用下式定义 $i_X:A^r(M)\to A^{r-1}(M)$，$\varphi\mapsto {}_X\varphi$:

$$i_X\varphi(X_1,\cdots,X_{r-1})=\varphi(X,X_1,\cdots,X_{r-1}),\quad X_1,\cdots,X_{r-1}\in\mathscr{X}(M).$$

证明：映射 $L_X=i_X\circ d+d\circ i_X:A^r(M)\to A^r(M)$ 是 r 重线性的，且具有下述性质：

1° $L_X(A^r(M))\subset A^r(M)$.

2° $L_X\circ d=d\circ L_X$.

3° 若 $\varphi\in A^r(M)$，$\psi\in A^s(M)$，则 $L_X(\varphi\wedge\psi)=(L_X\varphi)\wedge\psi+\varphi\wedge L_X\psi$.

8．证明：在 $A(M)$ 上至多存在一个 r 重线性算子 L_X，它具有上题的性质 1°，3°．以及以下性质：若 $f\in C^\infty(M)$，则 $L_Xf=Xf$．且 $L_X(df)=d(Xf)$.

9．在 C^∞ 流形 $GL(n,\boldsymbol{R})$ 上，以 $\left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right)=\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right)i$（第 i 行、第 j 列）表示各点切空间的基向量，即若 $X_p\in T_p(G(n,\boldsymbol{R}))$，则有

$$X_p=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(p)\frac{\partial}{\partial x^{ij}}.$$

定义二阶共变张量场 ϕ 如下：

$$\phi(X,Y)=\mathrm{trace}(A\cdot{}^tB),\quad Y=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial}{\partial x^{ij}},$$

其中 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，"$\cdot$"表示矩阵乘法．证明 ϕ 是 $GL(n,\boldsymbol{R})$ 上黎曼度量.

10．设 $\boldsymbol{R}^3$ 具有通常的欧氏内积 $\langle X,Y\rangle=\left\langle X^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}X^iY^i$. $M\subset\boldsymbol{R}^3$ 为 C^k 曲面．$I:M\to\boldsymbol{R}^3$ 为包含映射．$\forall p\in M$，X_p，$Y_p\in T_p(M)$，定义

$$g_p(X_p,Y_p)=\langle I_*X_p,I_*Y_p\rangle.$$

验证 g 是 M 上黎曼度量，它称为由 $\langle\ ,\ \rangle$ 诱导的黎曼度量，此即 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的度量.

11．设 $x(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，是 $\boldsymbol{R}^m$ 中由原点到 $(a^1,\cdots,a^m)$ 的曲线．且设

$x(t)=\lambda(t)v(t)$, $\lambda(t)>0(t>0)$, $v(t)$为单位向量. 证明: $\|x'(t)\|^2=(\lambda'(t))^2+(\lambda(t))^2\|v'(t)\|^2$. 且利用此结论证明上述曲线的长度不小于$\|x(1)-x(0)\|$.

12. 证明: 在C^k黎曼流形的任一点p, 必存在一个邻域U_p, 其上具有C^{k-1}正交规范标架场.

§4 流形上的积分 Stokes定理

4.1 流形的定向

设V是m维向量空间, $\{e_i | 1\leqslant i\leqslant m\}$和$\{f_i | 1\leqslant i\leqslant m\}$为$V$的两组基向量, 且设

$$f_i=a_i^j e_j,\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant m. \tag{2.4.1}$$

如果

$$\det(a_i^j)>0, \tag{2.4.2}$$

则称这两组基向量具有相同的定向. 记成

$$\{e_1,\ \cdots,\ e_m\}\sim\{f_1,\ \cdots,\ f_m\}.$$

明显地, 这是一个等价关系. V的各组基向量恰有二个等价类. 例如, 对于R^3有下图

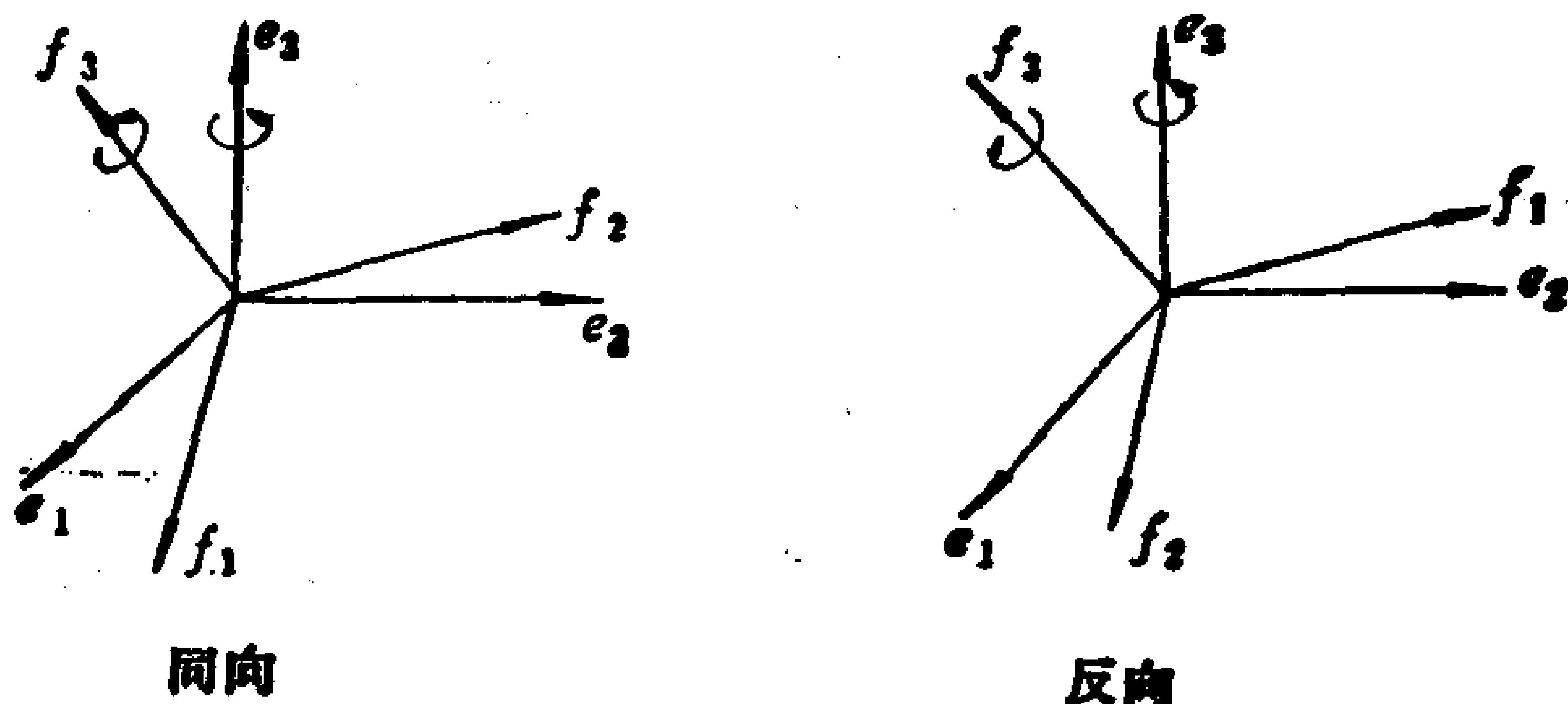


图 7

定义 2.4.1 一个定向向量空间是一个向量空间连同基向量组的一个等价类.

为了便于推广，我们改用另外的表述．设 V^* 为 V 的对偶空间，因为 $\dim\wedge^m(V^*)=1$，可设 Ω 为 $\wedge^m(V^*)$ 的基．由(2.4.1)有

$$\Omega(f_1, \cdots, f_m)=\det(a_i^j)\Omega(e_1, \cdots, e_m). \qquad (2.4.3)$$

因此，对于一个非零的 $\Omega\in\wedge^m(V^*)$，它作用在 V 的两组基向量上具有相同符号的充要条件是这两组基向量具有相同的方向．这样，选定一个 $\Omega(\neq 0)\in\wedge^m(V^*)$ 就决定了向量空间 V 的一个定向．此外易见，两个 m 次形式 Ω_1 和 Ω_2 决定相同的定向，当且仅当 $\Omega_1=\lambda\Omega_2$, $\lambda>0$, 且 $\Omega_i\neq 0(i=1, 2)$．这样，我们给出下列定义．

定义 2.4.2 设 M 为 m 维 C^k 流形．如果存在 M 上一个处处不为零的连续的 m 次外微分形式 ω，则称 M **是可定向的**．设 ω_1 和 ω_2 是各自给出 M 的定向的两个外微分形式，从而 $\omega_2=f\omega_1$，$f\in C^0(M)$．若 $f>0$，则称 ω_1 和 ω_2 **是等价的**．M **的一个定向**即是选定 M 的 m 次外微分形式的一个等价类．

如果 M 是连通的，ω_1 和 ω_2 是给出 M 的定向的二个 m 次外微分形式，则 $\omega_2=f\omega_1$，且 f 在 M 上保持同一个符号．所以连通的 C^k 流形 M 恰有两个不同的定向．

设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$、$(U_\beta, \varphi_\beta)$ 是 M 的两个坐标图，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$．则 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$: $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to R^m$ 是 C^k 映射．对任一点 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$，记

$$D_{\alpha\beta}(p)=\det(D(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}))_{\varphi_\beta(p)}. \qquad (2.4.4)$$

定理 2.4.1 C^k 流形 M 是可定向的，当且仅当存在坐标图册 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，它们覆盖 M，并且对于任意的 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $D_{\alpha\beta}(p)>0$.

证明 可以认为 M 是连通的，否则可对 M 的每个连通分支来证明．现设 ω 为 M 上处处不为零的连续的 m 次外微分形式，且设坐标图册 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)\}$ 覆盖 M．置

$$\omega_\alpha=dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m.$$

于是，可以认为

$$\omega|_{U_\alpha}=f_\alpha\omega_\alpha,\quad f_\alpha>0,\quad f_\alpha\in C^0(U_\alpha).\tag{2.4.5}$$

因为当$f_\alpha<0$时，我们可用$(-x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^m)$来代替$(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)$，即改变其中某一个坐标的符号，这就使$\omega_\alpha$改变符号，从而使$f_\alpha>0$. 此外，仿照(1.2.31)式，在$U_\alpha\cap U_\beta$上，

$$\omega_\alpha=\det\left(\frac{\partial(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)}{\partial(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)}\right)\omega_\beta=D_{\alpha\beta}\omega_\beta.\tag{2.4.6}$$

且又有$f_\beta\omega_\beta=f_\alpha\omega_\alpha$，故$\omega_\alpha=\frac{f_\beta}{f_\alpha}\omega_\beta$. 于是在$U_\alpha\cap U_\beta$上

$$D_{\alpha\beta}=\frac{f_\beta}{f_\alpha}>0.$$

反之，设坐标图册$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)\}$覆盖$M$，并且在$U_\alpha\cap U_\beta$上$D_{\alpha\beta}>0$. 置$\omega_\alpha=dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m$，且设$\{f_\alpha\}$为从属于$\{U_\alpha\}$的$C^k$单位分解. 用下式定义$M$上$m$次外微分形式

$$\omega=\sum_\alpha f_\alpha\omega_\alpha.$$

因为对任一点$p\in M$，集合$S=\{\alpha|p\in\operatorname{supp}f_\alpha\}$为非空有限集. 于是

$$\omega(p)=\sum_{p\in S}f_\alpha(p)\omega_\alpha(p)=\left(\sum_{\alpha\in S}f_\alpha(p)D_{\alpha\alpha_0}(p)\right)\omega_{\alpha_0}(p),$$

其中$\alpha_0\in S$是固定的. 因为$f_\alpha\geqslant0$. $\sum_{\alpha\in S}f_\alpha(p)=1$, $D_{\alpha\alpha_0}(p)>0$. 故知$\omega(p)\neq0$，即ω为M上连续的且处处不为零的m次外微分形式，从而M是可定向的. ▮

设(M, g)是m维定向黎曼流形. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_{(\alpha)}^i)\}$是与定向相符的坐标图册. 在局部坐标系$x_{(\alpha)}^1, \cdots, x_{(\alpha)}^m$中，

$$g=g_{ij}^{(\alpha)}dx_{(\alpha)}^i\otimes dx_{(\alpha)}^j\quad(\alpha\text{不作和}),$$

$$g_{ij}^{(\alpha)}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_{(\alpha)}^i}, \frac{\partial}{\partial x_{(\alpha)}^j}\right).$$

置

$$\eta_\alpha=\sqrt{G_\alpha}\,dx_{(\alpha)}^1\wedge\cdots\wedge dx_{(\alpha)}^m,\quad G_\alpha=\det(g_{ij}^{(\alpha)}).\tag{2.4.7}$$

利用

$$dx^1_{(\alpha)}\wedge\cdots\wedge dx^m_{(\alpha)}=\det\left(\frac{\partial(x^1_{(\alpha)},\ \cdots,\ x^m_{(\alpha)})}{\partial(x^1_{(\beta)},\ \cdots,\ x^m_{(\beta)})}\right)dx^1_{(\beta)}\wedge\cdots\wedge dx^m_{(\beta)},$$

$$g^{(\alpha)}_{ij}=g^{(\beta)}_{hk}\ \frac{\partial x^h_{(\beta)}}{\partial x^i_{(\alpha)}}\ \frac{\partial x^k_{(\beta)}}{\partial x^j_{(\alpha)}}\quad (\beta\ \text{不作和}).$$

容易证明，在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $\eta_\alpha=\eta_\beta$. 因此，(2.4.7)给出了 M 的一个定向，它称为$(M,\ g)$的**体积元**. 特别，如果选取 U_α 上的一个正交规范标架场 $e_1,\ \cdots,\ e_m$，于是 $g_{ij}=g(e_i,\ e_j)=\delta_{ij}$，此时体积元

$$\eta_\alpha=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m. \tag{2.4.7'}$$

这里$\{\omega^i\}(1\leqslant i\leqslant m)$是$\{e_i\}(1\leqslant i\leqslant m)$的对偶标架场.

4.2 带边界流形

先引入记号

$$\boldsymbol{R}^m_+=\{(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\boldsymbol{R}^m\,|\,x^m\geqslant 0\},$$

$$\partial\boldsymbol{R}^m_+=\{(x^1,\ \cdots,\ x^m)\in\boldsymbol{R}^m\,|\,x^m=0\}\equiv\boldsymbol{R}^{m-1}\times\{0\}.$$

定义 2.4.3 设在 $\boldsymbol{R}^m$ 的诱导拓扑下，U 是 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开集，则称 $\operatorname{Int}U=U\cap\{x\in\boldsymbol{R}^m\,|\,x^m>0\}$为 U 的内部，$\partial U=U\cap\partial\boldsymbol{R}^m_+$ 为 U 的边界.

定义 2.4.4 设 U 和 V 都是 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开集，$f:U\to V$. 如果对每一点 $p\in U$ 都有 p 和 $f(p)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开邻域 U_1 和 V_1，以及一个 C^k 映射 $f_1:U_1\to V_1$，使得

$$f|_{U\cap U_1}=f_1|_{U\cap U_1},$$

则称 $f:U\to V$ 为 C^k 映射，且定义

$$Df(p)=Df_1(p),\quad p\in U.$$

上述定义与 f_1 的选取是无关的，即可以证明：如果 W 为 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集，$\varphi:W\to\boldsymbol{R}^m$ 为 C^k 映射使得 $\varphi|W\cap\boldsymbol{R}^m_+=0$，则对所有的 $x\in W\cap\boldsymbol{R}^m_+$，$D\varphi(x)=0$. 事实上，当 $x\in\operatorname{Int}(W\cap\boldsymbol{R}^m_+)$时，这个结论是明显的. 若 $x\in\partial(W\cap\boldsymbol{R}^m_+)$，选取序列 $\{x_n\}\subset\operatorname{Int}(W\cap\boldsymbol{R}^m_+)$ 使得 $x_n\to x$，就有 $0=D\varphi(x_n)\to D\varphi(x)$.

引理 1 设 U 为 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开集，$\varphi:U\to\boldsymbol{R}^m_+$ 为 $C^k(k\geqslant1)$ 映射. 若 $x_0\in\operatorname{Int}U$ 使得 $\varphi(x_0)\in\partial\boldsymbol{R}^m_+$, 则 $D\varphi(x_0)(\boldsymbol{R}^m)\subset\partial\boldsymbol{R}^m_+$, 即 $\forall x\in\boldsymbol{R}^m$, $D\varphi(x_0)x\in\partial\boldsymbol{R}^m_+$.

证明 由于 φ 为 $C^k(k\geqslant1)$ 映射，故

$$\varphi(x_0+tx)=\varphi(x_0)+D\varphi(x_0)tx+o(tx),$$

$$\lim_{t\to0}\frac{o(tx)}{t}=(\overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{m\text{个}}).$$

设 $\pi^m:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$ 为 $(x^1,\cdots,x^m)\mapsto x^m$. 因对任意的 $y\in U$, 有 $\pi^m\circ\varphi(y)\geqslant0$, 且 $\pi^m\circ\varphi(x_0)=0$, 故

$$0\leqslant\pi^m\circ\varphi(x_0+tx)=\pi^m\circ D\varphi(x_0)tx+\pi^m\circ(o(tx)).$$

据此，当 $t>0$ 时，

$$0\leqslant\pi^m\circ D\varphi(x_0)x+\pi^m\left(\frac{o(tx)}{t}\right)\xrightarrow[(t\to0)]{}\pi^m\circ D\varphi(x_0)x.$$

相仿，当 $t<0$ 时可证得 $0\geqslant\pi^m\circ D\varphi(x_0)x$. 于是对所有的 $x\in\boldsymbol{R}^m$ 有 $\pi^m\circ D\varphi(x_0)x=0$, 即

$$D\varphi(x_0)(\boldsymbol{R}^m)\subset\boldsymbol{R}^{m-1}\times\{0\}=\partial\boldsymbol{R}^m_+. \ ▌$$

利用定义 2.4.4, 仿照第一章§1 所作，可定义 $\boldsymbol{R}^m_+$ 中两个开集的微分同胚，对此有

引理 2 设 U 和 V 都是 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开集，$f:U\to V$ 是 $C^k(k\geqslant1)$ 微分同胚，则

$$f|_{\operatorname{Int}U}\equiv\operatorname{Int}f:\operatorname{Int}U\to\operatorname{Int}V,$$

$$f|_{\partial U}\equiv\partial f:\partial U\to\partial V$$

都是 C^k 微分同胚.

证明 先假定 $\partial U=\varnothing$. 我们来证明 $\partial V=\varnothing$, 因而 $\operatorname{Int}f=f$. 用反证法，若 $\partial V\neq\varnothing$, 则存在 $x^*\in U$ 使得 $f(x^*)\in\partial V$. 由于 $f:U\to V$ 为 C^k 微分同胚，据定义 2.4.4, 存在 x^* 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开邻域 $U_1(\subset U)$ 和 $f(x^*)$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开邻域 V_1, 以及两个 C^k 映射

$f_1:U_1\to V_1$ 和 $g_1:V_1\to U_1$, 使得

$$f_1=f|_{U_1},\ g_1|_{V\cap V_1}=f^{-1}|_{V\cap V_1}.$$

取$\{y_n\}\subset V_1\cap V$, 使得 $y_n\to f(x^*)$, 则 $f^{-1}(y_n)=x_n\in U_1$, $x_n\to x^*$, 且有

$$Df(x^*)\circ Dg_1(f(x^*))=\lim_{y_n\to f(x^*)}Df(g_1(y_n))\circ Dg_1(y_n)$$
$$=\lim_{y_n\to f(x^*)}D(f\circ f^{-1})(y_n)=I_{R^m},$$

这里 I_{R^m} 表示恒同映射. 类似地, 可证 $Dg_1(f(x^*))\circ Df(x^*)=I_{R^m}$. 因此$(Df(x^*))^{-1}$存在, 并且等于 $Dg_1(f(x^*))$, 故 $Df(x^*)$: $R^m\to R^m$ 为同构. 而这与引理1的论断 $Df(x^*)(R^m)\subset\partial R^m_+$ 不符.

同样, 假定 $\partial V=\varnothing$. 如果 $\partial U\neq\varnothing$, 则以 f^{-1} 代替 f, 与以上相同的讨论也导致矛盾, 故 $\partial U=\varnothing$. 现设 $x\in\operatorname{Int}U$, 则有 x 在 R^m 中的一个开邻域 U_1 使得 $U_1\subset U$, 且 $U_1\cap\partial U=\varnothing$. 因此 $\partial U_1=\varnothing$. 根据以上论述 $\partial(f(U_1))=\varnothing$, 从而 $f(\operatorname{Int}U)\subset\operatorname{Int}V$. 类似地, 以 f^{-1} 代替 f, 则可证得 $f^{-1}(\operatorname{Int}V)\subset\operatorname{Int}U$. 因此 $f:\operatorname{Int}U\to\operatorname{Int}V$ 为 C^k 微分同胚. 但同时也有 $f(\partial U)=\partial V$ 且 $f|_{\partial U}:\partial U\to\partial V$ 也是 C^k 微分同胚. ∎

定义 2.4.5 在通常 m 维 C^k 流形 M 的定义中, 将 R^m 用 R^m_+ 来代替. 就得到 m 维带边界的 C^k 流形 M, 如果对于 $p\in M$, 存在包含它的坐标图(U,φ), 使得 $\varphi(U)\cap\partial R^m_+=\varnothing$, 则称 p 为 M 的内点, 否则称为 M 的边界点.

用 ∂M 表示 M 的边界点的集合, $\operatorname{Int}M$ 表示 M 的内点的集合, 见图 8.

显见, $\operatorname{Int}M$ 即为通常意义下的 m 维 C^k 流形. 此外, 以往有关流形的定义、命题、定理对于带边界的流形 M 仍然适用. 但这时 M 的正则覆盖$\{(U_i,\varphi_i;V_i)\}$要作如下修改: 使用正方体坐标

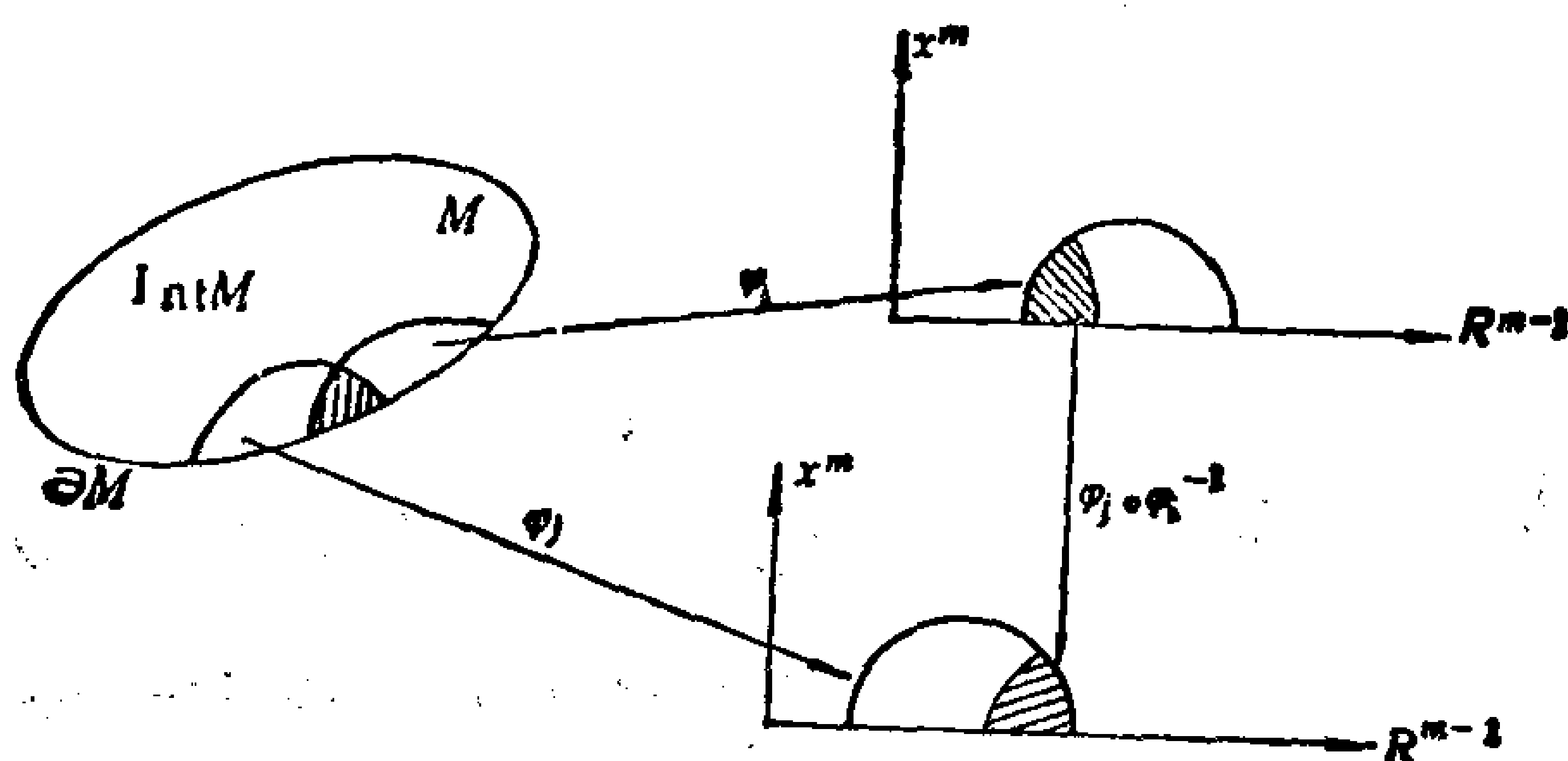


图 8

邻域，并且若 $U_i\cap\partial M\neq\varnothing$，则 $\varphi_i(U_i)=C_1^m(0)\cap\boldsymbol{R}_+^m$，$\varphi_i(V_i)=C_{1/2}^m(0)\cap\boldsymbol{R}_+^m$.

定理2.4.2 设 M 为 m 维 C^k 带边界流形，则 M 上的微分结构确定了 ∂M 上的 C^k 微分结构，使得 $(i,\ \partial M)$ 是 M 的正则子流形，这里 i 为包含映射．如果 M 是可定向的，则 ∂M 也是可定向的，且 M 的定向决定了 ∂M 的一个定向．

证明 $\partial\boldsymbol{R}_+^m$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的子流形且与 $\boldsymbol{R}^{m-1}$ 同胚，故对 M 的坐标图$(U,\ \varphi)$，$\varphi(\partial U)=\varphi(U)\cap\partial\boldsymbol{R}_+^m$ 是 $\partial\boldsymbol{R}_+^m$ 的开集．从而 ∂M 上的微分结构可由坐标图册$\{(\tilde{U}_\alpha,\ \tilde{\varphi}_\alpha)\}$所确定，其中 $\tilde{U}_\alpha=U_\alpha\cap\partial M$，$\tilde{\varphi}_\alpha=\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap\partial M}$，而$(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$为 M 的含有其边界点的坐标图，即 $U_\alpha\cap\partial M\neq\varnothing$．于是 ∂M 为 $m-1$ 维 C^k 微分流形．此外

$$\varphi(U\cap\partial M)=\{x\in\varphi(U)\,|\,x^m=0\},$$

故$(i,\ \partial M)$是 M 的正则子流形．

再来证明 M 的定向决定 ∂M 的一个定向．设$(U,\ \varphi;\ x^i)$和$(V,\ \psi;\ y^i)$是 M 中包含点 $p\in\partial M$ 的定向的坐标图．显然，$x^m\geqslant0$，$y^m\geqslant0$，且等号分别仅当 U 和 V 的点在 ∂M 上时成立．$\psi\circ\varphi^{-1}$ 局部地可表成

$$y^i=y^i(x^1,\ \cdots,\ x^m),\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

注意到 $0=y^m(x^1,\ \cdots,\ x^{m-1},\ 0)$，故对任意的 $q\in U\cap V\cap\partial M$，有

$$D(\psi\circ\varphi^{-1})_{\varphi(q)}=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} & * \\ \hline 0\cdots 0 & \dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\end{array}\right)_{\varphi(q)},\quad \alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ m-1.$$

现设 $\varphi(q)=(a^1,\ \cdots,\ a^{m-1},\ 0)$，令

$$f(t)=y^m(a^1,\ \cdots,\ a^{m-1},\ t),\qquad \forall t\geqslant 0,$$

则 $f(t)\geqslant 0$，且 $\left(\dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_{\varphi(q)}=f'(0)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(t)}{t}\geqslant 0$. 但因为

$$\det(D(\psi\circ\varphi^{-1}))>0.$$

故必须$\left(\dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_{\varphi(q)}>0$ 及 $\det\left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_{\varphi(q)}>0$. 注意到$(x^1,\ \cdots,\ x^{m-1})$ 和$(y^1,\ \cdots,\ y^{m-1})$正是 ∂M 的点在不同坐标系下的局部坐标，而 $\{(\tilde{U},\ \tilde{\varphi})\}$为 ∂M 的坐标图册，故知 M 的定向诱导了 ∂M 的一个定向. ∎

当以$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$给出 M 在边界点的一个坐标邻域$(U,\ \varphi;\ x^i)$中的定向时，今后以

$$(-1)^m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1} \tag{2.4.8}$$

表示在 $U\cap\partial M$ 上的诱导定向.

设 $q\in U\cap V\cap\partial M$，$X_q\in T_q(M)$，它可表成

$$X_q=X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q=Y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q.$$

因为$\left(\dfrac{\partial y^m}{\partial x^m}\right)_{\varphi(q)}>0$，故 X^m 和 Y^m 有相同的符号. 这样，$T_q(M)-T_q(\partial M)$中的向量可以分成两类：最后的分量是正的，称为在 $q\in\partial M$ 指向内的向量；最后的分量是负的，称为指向外的向量. 而 $T_q(M)$中最后的分量为零的向量是与∂M 相切的. 这样的分类是与 M 的定向无关的.

设 $p\in M$，U 为 p 的坐标邻域. 记 $\mathscr{D}(p)=\{f\in C^k(U)\mid f\geqslant 0$，且$f(p)=0\}$，$X_p\in T_p(M)$. 如果对于任何的$f\in\mathscr{D}(p)$都有

$X_p f \geqslant 0$，且至少有一个 $h \in \mathscr{D}(p)$，使得 $X_p h > 0$，则 $p \in \partial M$. 因若 $p \in \operatorname{Int} M$，则对任何的 $f \in \mathscr{D}(p)$，f 在 p 点有一个极小值，因此 $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = 0$，$1 \leqslant i \leqslant m$. 故对任意的 $Y \in T_p(M)$ 均有 $Yf = 0$. 这与所设矛盾. 这样的 $X_p \in T_p(M)$，$p \in \partial M$ 称为正向量. 我们有以下结论：

设 $p \in \partial M$，则 $X \in T_p(M)$ 为正向量的充要条件是它是指向内的.

4.3 流形上的积分与 Stokes 定理

在多重积分里有以下变量代换公式，我们将它叙成

引理 1(J. Schwarz) 设 Ω 和 Ω' 是 R^m 中的开集，且 $h: \Omega' \to \Omega$ 为 C^1 微分同胚. 若 f 为其紧致支集在 Ω 中的连续函数，则有

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx^1 \cdots dx^m = \int_{\Omega'} f \circ h(y)\,|\det(Dh(y))|\,dy^1 \cdots dy^m, \tag{2.4.9}$$

其中 $|\det(Dh(y))|$ 为 C^1 映射 $h: \Omega' \to \Omega$ 的 Jacobi 矩阵的行列式的绝对值.

设 M 为 m 维 C^k 流形，且 m 次外微分形式 ω_0 给定了 M 的一个定向. 设 $(U_1, \varphi_1; x^i_{(1)})$ 和 $(U_2, \varphi_2; x^i_{(2)})$ 是 M 的两个与定向相符的坐标图，$U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. 在 $U_a (a = 1, 2)$ 上，我们有

$$\omega_0 = f_a \omega_a \equiv f_a dx^1_{(a)} \wedge \cdots \wedge dx^m_{(a)}, \quad f_a > 0 \ (a = 1, 2), \tag{2.4.10}$$

且对于 $p \in U_1 \cap U_2$，根据(2.4.6)式，有

$$\omega_1(p) = D_{12}(p)\omega_2(p) = \det(D(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}))_{\varphi_2(p)}\omega_2(p).$$

于是得

$$D_{12}(p) = \frac{f_2(p)}{f_1(p)} > 0. \tag{2.4.11}$$

设 ω 为 M 上连续的 m 次外微分形式，于是在 $U_1 \cap U_2$ 上可表成

$$\omega = g_a\omega_a, \quad g_a \in C^0(U_1 \cap U_2), \quad a=1, 2. \tag{2.4.12}$$

引理 2 若 g_1(且从而 g_2)在 $U_1 \cap U_2$ 中有紧致支集，则成立

$$\int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} g_1\circ\varphi_1^{-1}dx_{(1)}^1\cdots dx_{(1)}^m = \int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g_2\circ\varphi_2^{-1}dx_{(2)}^1\cdots dx_{(2)}^m. \tag{2.4.13}$$

证明 因为 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}:\varphi_2(U_1\cap U_2)\to\varphi_1(U_1\cap U_2)$ 为 C^k 微分同胚，且根据 (2.4.10) 和 (2.4.12)，$g_1f_2=g_2f_1$. 故由 (2.4.9)，(2.4.11) 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_1(U_1\cap U_2)} g_1\circ\varphi_1^{-1}dx_{(1)}^1\cdots dx_{(1)}^m \\
&= \int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g_1\circ\varphi_1^{-1}\circ(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})(\varphi_2(p))D_{12}(p)dx_{(2)}^1\cdots dx_{(2)}^m \\
&= \int_{\varphi_2(U_1\cap U_2)} g_2\circ\varphi_2^{-1}dx_{(2)}^1\cdots dx_{(2)}^m. \quad ▮
\end{aligned}$$

今设 ω 为 M 上连续的 m 次外微分形式，且具有紧致支集，即

$$S=\operatorname{supp}\omega=\overline{\{p\in M \mid \omega(p)\neq 0\}}$$

为紧致集. 于是可用有限个开集 $Q_1, \cdots, Q_r$ 覆盖 S，从而开集 $Q_1, \cdots, Q_r, M-S$ 覆盖 M. 选取一个与 M 的定向 ω_0 相符的从属于上述覆盖的正则覆盖$\{(U_j, \varphi_j; V_j)\}$，可作出一个单位分解$\{f_i\}$，且可假定

$$\operatorname{supp} f_l \subset U_l (l=1, \cdots, r),$$

并且在 S 上，$f_j=0$, $j=r+1, \cdots$，故

$$\omega=\sum_{l=1}^{r} f_l\omega = f_1\omega+\cdots+f_r\omega.$$

因为 $\operatorname{supp} f_l\omega \subset \operatorname{supp} f_l \subset U_l$，且设在 U_l 上，

$$\omega = g_l\omega_l = g_l dx_{(l)}^1\wedge\cdots\wedge dx_{(l)}^m,$$

故我们可定义

$$\int_M f_l\omega=\int_{U_l}f_l\omega=\int_{\varphi_l(U_l)}f_lg_l\circ\varphi_l^{-1}dx_{(l)}^1\wedge\cdots\wedge dx_{(l)}^m$$
$$=\int_{\varphi_l(U_l)}f_lg_l\circ\varphi_l^{-1}dx_{(l)}^1\cdots dx_{(l)}^m, \tag{2.4.14}$$
最后一个积分是通常的 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 m 重积分. 然后定义
$$\int_M\omega=\sum_{l=1}^r\int_M f_l\omega. \tag{2.4.15}$$
为使这个定义是完全确定的，我们需要证明它与正则覆盖以及从属于它的单位分解选择无关. 设 $\{(U'_i,\ \varphi'_i;\ V'_i)\}$ 是另一个正则覆盖，$\{f'_i\}$是从属于它的一个单位分解. 且设
$$\operatorname{supp}f'_h\subset U'_h(h=1,\ \cdots,\ r'),$$
并且在 S 上 $f'_i=0(i=r'+1,\ \cdots)$. 由(2.4.14)及引理 2, 可知
$$\int_M f_l(f'_h\omega)=\int_{U_l}f_l(f'_h\omega)=\int_{U'_h}f'_h(f_l\omega)=\int_M f'_h(f_l\omega).$$
于是
$$\sum_{h=1}^{r'}\int_M f'_h\omega=\sum_{h=1}^{r'}\sum_{l=1}^{r}\int_M f_lf'_h\omega=\sum_{l=1}^{r}\sum_{h=1}^{r'}\int_M f'_hf_l\omega=\sum_{l=1}^{r}\int_M f_l\omega.$$
于是，我们给出下面的定义.

定义 2.4.6 设 M 为 m 维可定向 C^k 流形，ω 为 M 上具有紧致支集的 m 次连续的外微分形式，由(2.4.15)定义的 $\int_M\omega$ 称为外微分形式 ω 在 M 上的**积分**.

易见，当 $\operatorname{supp}\omega$ 位于一个与定向相符的坐标图$(U,\ \varphi;\ x^i)$中时，$\int_M\omega=\int_U\omega=\int_{\varphi(U)}f\,dx^1\cdots dx^m$, 右方为 $\boldsymbol{R}^m$ 上通常的黎曼积分，故流形 M 上 m 次外微分形式的积分正是 $\boldsymbol{R}^m$ 上黎曼积分的推广. 此外，由上述过程即知，$\int_M$ 是 M 上具有紧致支集的 m 次外微分形式集合上的线性泛函，即

$$\int_M (c_1\omega_1+c_2\omega_2)=c_1\int_M \omega_1+c_2\int_M \omega_2, \quad c_1,\ c_2\in \boldsymbol{R}. \tag{2.4.16}$$

设ω为M上$r(<m)$次外微分形式，且具有紧致支集，(h,N)是M的r维嵌入子流形，则$h^*\omega$为r维流形N上的r次外微分形式，且具有紧致支集，故积分$\int_N h^*\omega$是有意义的．于是可定义

$$\int_{h(N)} \omega=\int_N h^*\omega. \tag{2.4.17}$$

现来证明流形上积分的基本定理．

定理2.4.3(Stokes 定理)　设M为m维可定向C^∞流形，ω为M上具有紧致支集的C^1的$(m-1)$次外微分形式，则

$$\int_M d\omega=\int_{\partial\widetilde{M}} i^*\omega, \tag{2.4.18}$$

式中$i:\partial M\to M$为包含映射，$\partial\widetilde{M}$表示∂M且具有由M的定向所诱导的定向．若$\partial M=\varnothing$，则右边的积分为零．

证明　由流形上外微分形式的积分的定义，因为ω具有紧致支集，故仅需对$\operatorname{supp}\omega$包含在$M$的一个与定向相符的坐标图$(U,\ \varphi;\ x^i)$内的情况加以论证即可．此时$m-1$次外微分形式$\omega$可表成

$$\omega=\sum_{i=1}^m(-1)^{i-1}\lambda^i dx^1\wedge\cdots\wedge dx^i\wedge\cdots\wedge \widehat{dx^m}, \quad \lambda^i\in C^1(U)$$

于是
$$d\omega=\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^i}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

故由(2.4.14)有

$$\int_M d\omega=\int_U d\omega=\int_{\varphi(U)}\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^i}\right)(x)dx^1\cdots dx^m, \quad x\in\varphi(U). \tag{2.4.19}$$

1．$U\cap\partial M=\varnothing$．$\varphi(U)$为$\boldsymbol{R}^m$的开集，不妨设$\varphi(U)$包含在正方体$C=\{x\in\boldsymbol{R}^m\,|\,0\leqslant x^i\leqslant 1,\ \ i=1,\ \cdots,\ m\}$内部，由于

$\operatorname{supp}\omega(\subset U)$ 是紧致的，可将 $\lambda^j(j=1, \cdots, m)$ 连续地延拓到 O 上，而它们在 $\varphi(U)$ 外均为零. 因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^i}\right)dx^1\cdots dx^m \\
&=\int_O\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\lambda^i}{\partial x^i}\right)dx^1\cdots dx^m \\
&=\sum_{i=1}^{m}\overbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}^{m-1\text{次}}\{\lambda^i(x^1, \cdots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \cdots, x^m) \\
&\quad -\lambda^i(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \cdots, x^m)\}dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^m \\
&=0.
\end{aligned}$$

另一方面，此时 $\operatorname{supp}\omega\subset\operatorname{Int}U=U$，$i^*\omega$ 为 ∂M 上的零形式，所以 $\int_{\partial\widetilde{M}}i^*\omega=0$.

2. $U\cap\partial M\neq\varnothing$. 仿上所作. $\varphi(U)\subset\mathring{O}\cup\{x\in\boldsymbol{R}^m|x^m=0\}$. 此处 $\mathring{O}$ 为 O 的内部，则(2.4.19)成为

$$\int_M d\omega=-\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m-1}\lambda^m(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0)dx^1\cdots dx^{m-1}$$

另一方面在 ∂M 上 $x^m=0$，故

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M}i^*\omega&=\int_{U\cap\partial M}i^*\omega \\
&=\int_0^1\cdots\int_0^1(-1)^{m-1}\lambda^m(x^1, \cdots, x^{m-1}, 0)dx^1\cdots dx^{m-1}.
\end{aligned}$$

因为 M 的定向由 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 给定时，∂M 的诱导定向由 $(-1)^m dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}$ 给定. 综合上述，就得

$$\int_M d\omega=(-1)^m\int_{M\cap\partial M}i^*\omega=\int_{\partial\widetilde{M}}i^*\omega. \quad ∎$$

利用(2.4.17)式，(2.4.18)式可写成

$$\int_M d\omega=\int_{i(\partial\widetilde{M})}\omega\left(=\int_{\partial\widetilde{M}}\omega\right).$$

借助上述 Stokes 定理，可给出经典微积分中有关的公式.

1. 设 M 为 $\mathbf{R}^2$ 上有界开子集的闭包，其边界为 $C^k(k\geq1)$ 简单闭曲线. 设 ω 为 M 上 C^1 的 1 次形式，使用自然笛卡儿坐标，$\omega=a\,dx+b\,dy$，$d\omega=\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy$，由 Stokes 定理得

$$\iint_M\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_M\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$=\int_{\partial M}a\,dx+b\,dy,$$

此即 Green 公式.

2. 设 M 为 $\mathbf{R}^3$ 上有界开子集的闭包，其边界为 $C^k(k\geq1)$ 闭曲面 S. 设 ω 为 M 上 C^1 的 2 次形式，则 $\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$，$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$. 于是根据 Stokes 定理，有

$$\iiint_M\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy,$$

此即散度定理.

3. 设 M 为 $\mathbf{R}^3$ 中曲面片，它由简单 $C^k(k\geq1)$ 闭曲线 l 所界限. ω 为 M 上 C^1 的 1 次形式，$\omega=A\,dx+B\,dy+C\,dz$，则 $d\omega=\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\wedge dx$. 从而即得通常的 Stokes 公式.

$$\iint_M\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\,dx$$

$$=\int_l A\,dx+B\,dy+C\,dz.$$

习　题

1．证明 C^k 流形的可定向性质在 C^k 微分同胚下是不变的．

2．设 $M\subset \boldsymbol{R}^{m+1}$，且 M 为 m 维 C^k 流形．$I:M\to\boldsymbol{R}^{m+1}$ 为包含映射，若 C^k 映射 $N:M\to T\boldsymbol{R}^{m+1}$，使得对于 $x\in M$ 有 $N(x)\in T_{I(x)}(\boldsymbol{R}^{m+1})$ 且垂直于 $I_{*x}(T_x(M))$（其中 $T_{I(x)}(\boldsymbol{R}^{m+1})$ 内的正交性是关于内积 $\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\delta_{ij}$ 而言，$\{x^i\}$ 为 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 的标准坐标）则称 $N(x)$ 为 M 上的法向量场．对于给定的 $N(x)$，在 $I(M)$ 上用下式定义一个 m 次形式 μ

$$\mu(I(x))(Y_1,\cdots,Y_m)=(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m+1})(N(x),Y_1,\cdots,Y_m),$$
$$x\in M,\ Y_1,\cdots,Y_m\in T_{I(x)}(\boldsymbol{R}^{m+1}).$$

令 $\omega=I^*\mu$，证明：

1° $\mu(I(x))=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i(N(x)x^i)\hat{dx^1}\wedge\cdots\wedge dx^i\wedge\cdots\wedge dx^{m+1}$．

2° 若 $x_0\in M$，使 $\omega(x_0)=0$，则 $\mu(I(x_0))=0$．从而若 M 上有一处处非零的 C^{k-1} 法向量场，则 M 是可定向的．

3．设 $F:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$，$(x^1,\cdots,x^m)\mapsto F(x^1,\cdots,x^m)$ 是秩为 1 的 C^k 映射．证明：超曲面 $F(x^1,\cdots,x^m)=c$（常数）是 $m-1$ 维 C^k 可定向的正则子流形．特别，单位球面 S^{m-1} 是可定向的．

4．Möbius 带的参数方程为

$$F(u,v)=\left(2\cos u+v\sin\frac{u}{2}\cos u,\ 2\sin u+v\sin\frac{u}{2}\sin u,\ v\cos\frac{u}{2}\right).$$

计算沿中心线 $v=0$ 的法向量 N 的连续变化，以证明 Möbius 带是不可定向的．

5．利用 $f:S^m\to P^m(\boldsymbol{R})$，$x\mapsto[x]$ 证明实射影空间 $P^m(\boldsymbol{R})$ 当 m 为奇数时，是可定向的；当 m 为偶数时，是不可定向的．

6．设 (M,g) 为可定向黎曼流形．$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_\alpha^i)\}$ 是与 M 的定向相符的坐标图册．证明

$$\sqrt{G_\alpha}\,dx_\alpha^1\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^m=\sqrt{G_\beta}dx_\beta^1\wedge\cdots\wedge dx_\beta^m=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m,$$

其中 $G_\alpha=\det(g_{(\alpha)ij})$，$g_{(\alpha)ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i},\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\right)$，而 $\{\omega^i\}$ 是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上与定向相符的规范正交标架场 $\{e_i\}$ 的对偶标架场．

7．设 M 是带边界的可定向黎曼流形．证明：在 M 上唯一存在一个单

位向量场 X，使对任一点 $p\in\partial M$，X_p 是指向内的，且与 $T_p(\partial M)$ 正交.

8. 设 M 是带边界的可定向 C^k 流形，ω_0 为给定 M 定向的 m 次形式. 证明：

1° 能选到定义在 M 上的向量场，使得在 ∂M 各点都是指向内的.

2° $\Omega=-i_X\omega_0$ 决定了 ∂M 上 M 的诱导定向，其中 $i_X: A^m(M)\to A^{m-1}(M)$ 类似于 § 3 习题 7 中的定义.

9. 设 N 是 m 维可定向 C^k 流形. M 是 N 的开子流形. 设 $\partial M=\{M$ 在 N 中的边界点$\}\neq\varnothing$. 证明：

1° M 是可定向的；

2° 如果对于任意 $p\in\partial M$，存在 N 的一个与定向相符的坐标图 $(U,\varphi;x^i)$，使得 $p\in U$，且

$$(*)\qquad \varphi(M\cap U)=\{x\in\varphi(U)\,|\,x^m>0\};$$

$$\varphi(\partial M\cap U)=\{x\in\varphi(U)\,|\,x^m=0\},$$

则 ∂M 是 N 的 $m-1$ 维可定向的 C^k 正则子流形.

3° 令 $N=\boldsymbol{R}^2$，$M=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,$ 或 $1<x^2+y^2<4\}$，则 ∂M 是 N 的正则子流形但不满足 $(*)$.

10. 设 M 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中可定向带边界的 2 维曲面，其边界为 ∂M. $\omega=\sum_{i=1}^{m}p_i dx^i$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 C^∞ 1 次形式，把 ω 限制在 M 上，试写出相应的 Stokes 定理.

11. 设 M 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中连通开子集的闭包，其边界为 ∂M，u，v 为 $\boldsymbol{R}^m$ 上具有紧致支集的 $C^k(k\geqslant 2)$ 函数，证明：

1° $$\int_M v\nabla^2 u\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m=\int_{\partial\widetilde{M}} v\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{\partial u}{\partial x^j}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m$$
$$-\int_M\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x^i}\,\frac{\partial v}{\partial x^i}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中 $\nabla^2 u=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^{i2}}$.

2° $$\int_M(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$
$$=\int_{\partial\widetilde{M}}\sum_j(-1)^{j-1}\left(u\frac{\partial v}{\partial x^j}-v\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

以上两式分别称为 Green 第一和第二公式.

3° 若 $\nabla^2 u=\nabla^2 v=0$. 且 $u|_{\partial M}=v|_{\partial M}$. 则 $u|_M=v|_M$.

12. 设 ω 是 m 维单位球面 S^m 上的 $C^\infty(m-1)$ 次形式，证明 $\int_{S^m} d\omega=0$.

13. 设 $\{x, y, z\}$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中笛卡儿坐标系. (i, M) 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中 2 维可定向嵌入子流形，其中 i 为包含映射. M 上具有由 $\boldsymbol{R}^3$ 的内积所诱导的黎曼度量 g. 设 (U, φ) 为 M 上与定向相符的坐标图，局部坐标为 (u, v). 记

$$E=g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad F=g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad G=g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right),$$

则 M 上的线素为

$$ds_M^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2.$$

$M|_U$ 上的单位法向量为 $\boldsymbol{n}_U=\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\Big/\left|\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right|=n^1\frac{\partial}{\partial x}+n^2\frac{\partial}{\partial y}+n^3\frac{\partial}{\partial z}$.

证明:

1° $n^1\,dy\wedge dz+n^2\,dz\wedge dx+n^3\,dx\wedge dy=\left\langle\frac{\partial}{\partial u}\times\frac{\partial}{\partial v}\right\rangle du\wedge dv$.

2° M 的体积元素 $dA=n^1\,dy\wedge dz+n^2\,dz\wedge dx+n^3\,dx\wedge dy$.

3° 设 $\omega=\frac{x}{r^3}\,dy\wedge dz+\frac{y}{r^3}\,dz\wedge dx+\frac{z}{r^3}\,dx\wedge dy\ (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 是 $R^3-\{0\}$ 上的 2 次形式. 记 $S^2(r_0)=\{(x, y, z)\in\boldsymbol{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r_0>0\}$, 则 $\int_{S^2(r_0)}\omega=4\pi$.

第三章 联络与曲率

§1 仿射联络

联络是微分流形上重要的几何概念，起源于古典微分几何中曲面上向量的平行移动，现在已推广到具有微分流形结构的纤维丛上。我们这里只限于讨论微分流形的切丛上的联络，其实质在于定义流形上向量场(切丛的截面)的一种方向导数，使之与坐标选择无关。由此产生一种新的微分法则，即所谓“共变微分”(协变微分)。从这个意义来说，联络就是共变微分。

1.1 R^m 及其子流形上的联络

设$(x^1, \cdots, x^m)$是欧氏空间 R^m 中点的笛卡儿(直角)坐标，利用 R^m 的欧氏平行性，自然标架$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 构成 R^m 中整体定义的基向量场，R^m 的任何向量场 Y 都可唯一地表示为

$$Y(x)=Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $Y^i(x)$是点 x 的函数，当 Y 是 C^k 向量场时，它们都是 C^k 函数。

设 $X=X^i(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是 R^m 的任一向量场，对于任一点$p\in R^m$，$X_p=X(p)=X^i(p)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，利用欧氏平行性，我们可以定义向量场 Y 在 p 点沿向量 X_p 的“方向导数”$D_{X_p}Y$ 如下：

$$D_{X_p}Y\overset{\text{def}}{=\!=}(X_pY^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\left(X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.1.1)$$

显然，它仅与 X 在 p 的值 $X_p=X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 有关，而与 X 在其它点的状态无关。因此，我们可从另一角度来计算 $D_{X_p}Y$。设 γ: $[0, a]\to \boldsymbol{R}^m$ 是任一曲线段，使得 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=X_p$, 那末，沿曲线 γ 就有

$$\frac{dY^i}{dt}(0)=\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p)\frac{dx^j}{dt}(0)=X^j(p)\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p)=X_pY^i,$$

所以

$$D_{X_p}Y=\frac{dY^i}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x^i}\quad(\text{沿曲线 }\gamma). \tag{3.1.2}$$

在上述两种计算中，我们都利用了 $\boldsymbol{R}^m$ 中的欧氏平行性。为了把这种运算推广到一般流形上，必须设法克服这种限制。

设 M 是 m 维微分流形，由 Whitney 定理，我们可把 M 看成欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{2m+1}$ 的嵌入子流形。用 i_M: $M\to\boldsymbol{R}^{2m+1}$ 表示这个嵌入映射。以下约定：$\boldsymbol{R}^{2m+1}$ 的自然坐标为 $\{y^A\}$，自然标架为 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^A}\right\}$, $1\leqslant A, B, C, \cdots\leqslant 2m+1$。对于任一点 $p\in M$，考虑包含 p 的一个坐标图 (U, φ)，其上局部坐标为 $\{x^i\}$, $1\leqslant i, j, k, \cdots\leqslant m$。于是复合映射 $f=i_M\circ\varphi^{-1}$ 给出了 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 到 $\boldsymbol{R}^{2m+1}$ 的一个微分同胚（嵌入），它的局部坐标表示是

$$f(x)=(y^1(x), \cdots, y^{2m+1}(x)),\ \forall x=(x^1, \cdots, x^m)\in\varphi(U).$$

M 在 p 点的切空间 $T_p(M)$ 是 $T_p(\boldsymbol{R}^{2m+1})$ 的子空间，因此，$T_p(M)$ 的自然基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_p$ 可用 $\left\{\frac{\partial}{\partial y^A}\right\}$ 线性表示

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p=\frac{\partial y^A}{\partial x^i}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^A}\right|_{i_M(p)}. \tag{3.1.3}$$

现设 $Y=Y^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 M 上向量场 Y 在自然基下的局部表示，$X_p=X^i(p)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 是向量场 X 在 p 点的值。考虑 M 上

曲线段 $\gamma:[0, a]\to M$，使得 $\gamma(0)=p$，$\gamma'(0)=X_p$. 它在(U,φ)中的局部表示是

$$\gamma: x^i=x^i(t),\ x^i(0)=x^i(p),\ \frac{dx^i}{dt}(0)=X^i(p). \quad (3.1.4)$$

于是，向量场 Y 沿 γ 的分布是

$$Y(\gamma(t))=Y^i(x(t))\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t)},$$

其中 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(0)}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$，当然，导向量

$$\frac{dY}{dt}\bigg|_p=\left(\frac{dY^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p+Y^i(0)\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

一般不再与 M 相切(如图 9 所示). 一种简单的办法是将 $\frac{dY}{dt}$ 作 M 的切向投影 π，记为 $\frac{DY}{dt}$，即

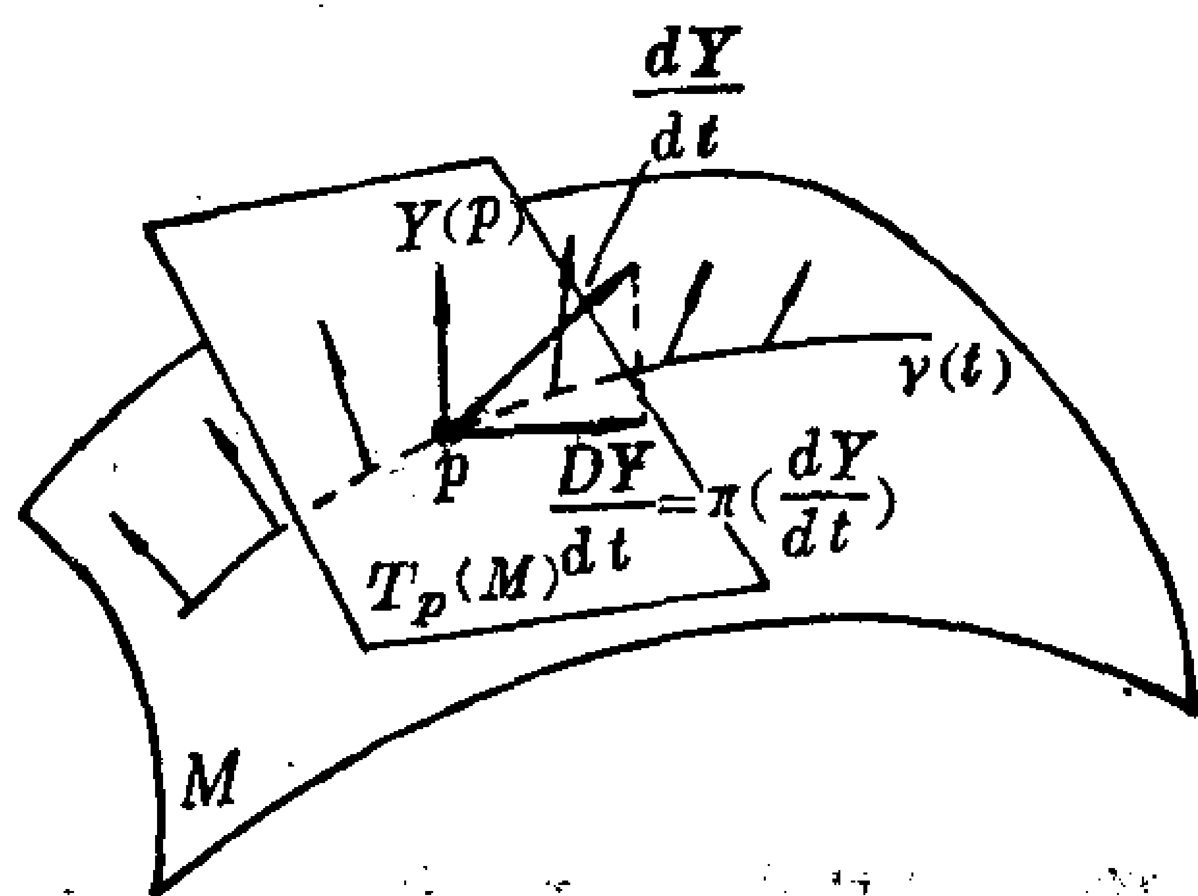


图 9

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_p\overset{\text{def}}{=\!=}\pi\left(\frac{dY}{dt}\right)_p$$

$$=\frac{dY^i}{dt}(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p+Y^j(p)\pi\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p. \quad (3.1.5)$$

利用(3.1.3)和(3.1.4)，注意到投影算子的线性性以及 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中欧氏平行性，上式可改写为

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_p=\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(p)X^j(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

$$+Y^j(p)\left(\frac{\partial^2 y^A}{\partial x^j\partial x^k}\right)_p X^k(p)\pi\left(\frac{\partial}{\partial y_A}\right)_{f(p)}.$$

(3.1.5′)

由于 π 是 M 的切向投影，则 $\pi\left(\frac{\partial}{\partial y_A}\right)_{f(p)}$ 可由 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}$ 线性表

示，设

$$\pi\left(\frac{\partial}{\partial y_A}\right)_{f(p)}=F^i_A(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,$$

则(3.1.5′)变成

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_p=\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}+P^i_{jk}Y^k\right)_p X^j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \qquad (3.1.6)$$

其中
$$P^i_{jk}(p)=\frac{\partial y_A}{\partial x^j\partial x^k}(p)F^i_A(p).$$

我们把(3.1.6)定义为向量场 Y 在 p 点沿 X_p 的方向导数，记为

$$D_{X_p}Y=\left(\frac{DY}{dt}\right)_p \qquad (3.1.7)$$

$$=X_p(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p+Y^i(p)D_{X_p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

其中
$$D_{X_p}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=P^i_{jk}(p)X^j(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

$$=P^i_{jk}(p)\frac{dx^j}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p,$$

它确定了基向量场 $\frac{\partial}{\partial x^k}$ 在 p 点沿 X_p 的方向导数.

对于上述定义的方向导数 D_xY，可以直接验证，它满足下列运算法则：设 X、Y、Z 是 M 上的可微向量场，f，$h\in C^1(M)$，则在任一点 p 有

(i) $D_{fX+hY}Z=fD_XZ+hD_YZ$,

(3.1.8)

(ii) $D_X(fY+hZ)=(Xf)Y+fD_XY+(Xh)Z+hD_XZ$.

1.2 微分流形上的仿射联络

现在我们希望从微分流形本身出发来定义向量场的方向导数，而不再把它看作欧氏空间的子流形. 上面的讨论已提供了这种

做法的一个模式，因此，我们不妨把思路颠倒过来，先用公理化方式给出定义，然后确定这种定义的具体构造细节. 这就是 Koszwl 首先提出的不变形式表达法.

定义 3.1.1 设 M 为 m 维光滑流形，$\mathscr{X}(M)$ 为 M 上光滑向量场空间，M 上的一个仿射联络是一个映射

$$\nabla:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M),\ (X,\ Y)\mapsto\nabla_X Y,$$

使得对于任何 $X,\ Y,\ Z\in\mathscr{X}(M)$ 和任意 $f,\ h\in C^\infty(M)$，满足以下条件

(i) $\nabla_{fX+hY}Z=f\nabla_X Z+h\nabla_Y Z,$

$$\tag{3.1.9}$$

(ii) $\nabla_X(fY+hZ)=(Xf)Y+f\nabla_X Y+(Xh)Z+h\nabla_X Z,$

$\nabla_X Y$ 称为 Y 关于 X 的(方向)共变导数，或协变导数.

由定义知，映射 ∇ 是 $\boldsymbol{R}$-线性的，并且对于任意 $p\in M$，$(\nabla_X Y)_p$ 仅依赖于 X_p 和以 X_p 为初始切方向的某一曲线 $\gamma(t)$ 上 Y 的分布值 $Y(\gamma(t))$.

设 $(U,\ \varphi)$ 是含点 $p\in M$ 的坐标图，$\{e_i\}$ 为 U 上局部基向量场，其对偶标架场为 $\{\omega^i\}$. 于是向量场 X 和 Y 的局部表示为

$$X=\omega^i(X)e_i,\ Y=\omega^i(Y)e_i.$$

根据定义，我们有

$$\nabla_X Y=\nabla_X(\omega^i(Y)e_i)=X(\omega^i(Y))e_i+\omega^i(Y)\nabla_X e_i. \tag{3.1.10}$$

由此可见，如果 $\nabla_X e_j$ 有定义，则 $\nabla_X Y$ 完全确定了. 因为 $\nabla_X e_j$ 仍然是 M 上的向量，它应该可以由 $\{e_i\}$ 线性表示，我们定义 m^2 个 1-形式 ω_j^i 如下：

$$\nabla_X e_j\stackrel{\text{def}}{=\!=}\omega_j^i(X)e_i,\quad \forall X\in\mathscr{X}(M). \tag{3.1.11}$$

由 ∇ 的性质(i)，ω_j^i 是线性的，它们称为仿射联络 1-形式. 显然

这些 ω_j^i 可用基形式 $\{\omega^i\}$ 线性表示

$$\omega_j^i=\Gamma_{kj}^i\omega^k. \tag{3.1.12}$$

由(3.1.11)和(3.1.12)得

$$\Gamma_{kj}^i e_i=\nabla_{e_k}e_j, \tag{3.1.13}$$

或

$$\Gamma_{kj}^i=\omega^i(\nabla_{e_k}e_j)=\omega_j^i(e_k). \tag{3.1.14}$$

函数 $\{\Gamma_{kj}^i\}$ 称为**仿射联络系数**，它们完全确定了一个仿射联络. 这样，若记 $Y^i=\omega^i(Y)$，则(3.1.10)可改写为

$$\begin{aligned}\nabla_X Y&=(X(Y^i)+\omega_j^i(X)Y^j)e_i\\&=(dY^i(X)+\omega_j^i(X)Y^j)e_i.\end{aligned} \tag{3.1.10'}$$

现设 $\{\bar{e}_i\}$ 是 U 上另一局部基向量场，其对偶形式为 $\{\bar{\omega}^i\}$，假定

$$\bar{e}_i=a_i^j e_j, \tag{3.1.15}$$

从而

$$\bar{\omega}^i=b_j^i\omega^j \quad 或 \quad \omega^i=a_j^i\bar{\omega}^j, \tag{3.1.16}$$

这里矩阵 (b_j^i) 是矩阵 (a_j^i) 的逆矩阵.

若仿射联络 ∇ 在基 $\{\bar{e}_i\}$ 下所确定的联络形式为 $\bar{\omega}_j^i$（由(3.1.11)的类似式定义），则利用(3.1.11)和(3.1.12)不难证明 $\{\bar{\omega}_j^i\}$ 和 $\{\omega_j^i\}$ 之间具有关系式

$$\bar{\omega}_j^i=(a_j^l\omega_l^k+da_j^k)b_k^i. \tag{3.1.17}$$

公式(3.1.17)的另一种解释是把 $\{\bar{e}_i\}$ 看作 M 的另一坐标图 $(\bar{U},\bar{\varphi})$ 中的局部基向量场，若 $U\cap\bar{U}=V\neq\varnothing$，则在 V 上，两组基向量场 $\{e_i\}$ 和 $\{\bar{e}_i\}$ 就有关系式(3.1.15). 为了在 V 上两组联络形式 $\{\omega_j^i\}$ 和 $\{\bar{\omega}_j^i\}$ 确定同一个仿射联络 ∇，它们必须满足关系式(3.1.17). 反之，若在不同基下给出两组 1-形式 $\{\omega_j^i\}$ 和 $\{\bar{\omega}_j^i\}$，它们满足(3.1.17)，则利用(3.1.11)和(3.1.10)就可以定义 $\nabla_X Y$. 这样，便确定了一个仿射联络 ∇. 因此，我们就得到仿射联络的另一等价定义，即

定义 3.1.2 设$\{U_\alpha\}$是 M 的坐标图册，若在每个 U_α 上给定了 m^2 个 1-形式$\{\omega_j^i(\alpha)\}$，使得$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$时，其上两组形式满足形如(3.1.17)的方程，则称(3.1.11)确定了 M 上的一个**仿射联络** ∇. (M, ∇)就称为**仿射联络空间**.

1.3 仿射联络的挠率和曲率

设 ∇ 是微分流形 M 上的仿射联络. 定义映射

$$T:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M),\ (X, Y)\to T(X, Y)$$

为

$$T(X, Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X, Y]. \qquad (3.1.18)$$

对于任何的 $X, Y, Z\in\mathscr{X}(M)$及$f\in C^\infty(M)$，由 ∇ 的 $\boldsymbol{R}$-线性性质及$[fX, Y]=f[X, Y]-(Yf)X$，易得

$$T(X, Y)=-T(Y, X),$$
$$T(X+Y, Z)=T(X, Z)+T(Y, Z).$$
$$T(fX, Y)=fT(X, Y).$$

因此映射T是$C^\infty(M)$双线性的，且是反称的.

再定义映射R: $\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathrm{End}(\mathscr{X}(M))$ (这里的$\mathrm{End}\mathscr{X}(M)$表示$\mathscr{X}(M)$上一切自同态构成的空间)，$(X, Y)\mapsto R(X, Y)$为

$$R(X, Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}, \qquad (3.1.19)$$

即

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z. \qquad (3.1.19')$$

于是，有

$$R(X, Y)Z=-R(Y, X)Z. \qquad (3.1.20)$$

不难直接验证，对于任何$f^1, f^2\in C^\infty(M)$有

$$R(f^1X_1+f^2X_2, Y)Z=f^1R(X_1, Y)Z+f^2R(X_2, Y)Z,$$

$$R(X, Y)(f^1Z_1+f^2Z_2)=f^1R(X, Y)Z_1+f^2R(X, Y)Z_2.$$
因此,映射$(X, Y, Z)\mapsto R(X, Y)Z$ 是 $C^\infty(M)$ 三重线性的.

定义 3.1.3 由(3.1.18)给定的映射T称为仿射联络∇的挠率. 若$T\equiv 0$,则称∇是无挠的或对称的.

既然$T(X, Y)\in\mathscr{X}(M)$,于是,由

$$T(X, Y)=T^i(X, Y)e_i \tag{3.1.21}$$

确定的m个2次形式T^i称为∇的挠率形式.

定义 3.1.4 由(3.1.19)给定的$R(X, Y)$称为∇的曲率算子,对应的线性变换$R(X, Y)$: $\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$称为曲率变换. 由(3.1.19′)确定的三重线性映射$R:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$称为仿射联络的曲率张量.

由于$R(X, Y)Z\in\mathscr{X}(M)$,故由

$$R(X, Y)e_i=\Omega_i^j(X, Y)e_j \tag{3.1.22}$$

定义的m^2个2-形式Ω_i^j称为∇的曲率形式.

一个仿射联络∇的联络形式ω_i^j, 挠率形式T^i及曲率形式Ω_i^j有下述著名关系:

定理 3.1.1(Cartan 结构方程)

$$d\omega^i=-\omega_k^i\wedge\omega^k+T^i, \tag{3.1.23}$$
$$d\omega_j^i=-\omega_k^i\wedge\omega_j^k+\Omega_j^i.$$

证明 设$X, Y\in\mathscr{X}(M)$,局部表示为

$$X=\omega^i(X)e_i,\quad Y=\omega^i(Y)e_i.$$

由(3.1.18)和(3.1.21)得

$$\begin{aligned}T^i(X, Y)e_i=T(X, Y)&=\nabla_X(\omega^i(Y)e_i)-\nabla_Y(\omega^i(X)e_i)\\&-\omega^i([X, Y])e_i=\{X(\omega^i(Y))\\&-Y(\omega^i(X))-\omega^i([X, Y])\}e_i\\&+\{\omega^j(Y)\omega_j^i(X)-\omega^j(X)\omega_j^i(Y)\}e_i,\end{aligned}$$

根据(2.3.10′), 上式第一个括号正是$d\omega^i(X, Y)$, 而后者可改写

为 $\omega^i_k\wedge\omega^k(X, Y)$，即有

$$T^i(X, Y)=d\omega^i(X, Y)+\omega^i_k\wedge\omega^k(X, Y).$$

由于 X, Y 的任意性，便得(3.1.23)的第一式. 类似地，根据 $R(X, Y)Z$ 的定义，可证明(3.1.23)的第二式.

设$\{\bar{e}_i\}$是由(3.1.15)给定的另一局部标架场，其对偶标架场为$\{\bar{\omega}^i\}$，仿射联络关于这个标架场的联络形式为$\{\bar{\omega}^i_j\}$，它由(3.1.17)表达，即有

$$da^k_j=a^k_i\bar{\omega}^i_j-a^i_j\omega^k_i. \tag{3.1.24}$$

对(3.1.16)的第二式两边外微分，利用(3.1.24)得

$$d\omega^i=(a^i_l\omega^l_j-a^l_j\omega^i_l)\wedge\bar{\omega}^j+a^i_jd\bar{\omega}^j,$$

再利用(3.1.16)可得

$$d\bar{\omega}^j+\bar{\omega}^j_k\wedge\bar{\omega}^k=b^j_i(d\omega^i+\omega^i_k\wedge\omega^k), \tag{3.1.25}$$

由 Cartan 结构方程的第一式，上式可写为

$$\bar{T}^j=b^j_iT^i. \tag{3.1.26}$$

同理，对(3.1.24)两边外微分，利用(3.1.16)和(3.1.24)得

$$d\bar{\omega}^k_l+\bar{\omega}^k_h\wedge\bar{\omega}^h_l=b^k_i(d\omega^i_j+\omega^i_h\wedge\omega^h_j)a^j_l.$$

由 Cartan 结构方程的第二式，上式即为

$$\bar{\Omega}^k_l=b^k_i\Omega^i_ja^j_l. \tag{3.1.27}$$

公式(3.1.26)和(3.1.27)分别给出了仿射联络的挠率形式和曲率形式在局部基向量场变化时的变换公式.

令

$$T^i=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\quad T^i_{jk}=-T^i_{kj}, \tag{3.1.28}$$

则由(3.1.26)可见，T^i_{jk} 是(1, 2)型张量的分量，它称为挠率张量.
再令

$$\Omega^i_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,\quad R^i_{jkl}=-R^i_{jlk}, \tag{3.1.29}$$

则由(3.1.27)可见，R^i_{jkl} 是(1.3)型张量的分量，它称为曲率张量.

特别，对于自然标架 $e_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$，有 $\omega^i=dx^i$，

$$\omega^i_j=\Gamma^i_{kj}dx^k,\ \Gamma^i_{kj}=\omega^i_j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

从而 $$T^i=d(dx^i)-dx^k\wedge\Gamma^i_{jk}dx^j=\Gamma^i_{jk}dx^j\wedge dx^k,$$

与(3.1.28)相比较，得

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj}. \tag{3.1.30}$$

由此可见，仿射联络 ∇ 为无挠的充要条件是 ∇ 的联络系数

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}.$$

而且由本章§1.1中的讨论可知，当 M 作为欧氏空间的子流形时，(3.1.6)定义的仿射联络 D 是无挠的.

类似地我们有

$$\begin{aligned}R^i_{jkl}&=\Omega^i_j\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right)\\&=\frac{\partial\Gamma^i_{lj}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}+\Gamma^h_{lj}\Gamma^i_{kh}-\Gamma^h_{kj}\Gamma^i_{lh}.\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

(3.1.30)和(3.1.31)分别是挠率张量和曲率张量的古典坐标分量表示.

现设$\{\bar{x}^i\}$是 U 上另一坐标系，则 $\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$，再设$\bar{\omega}^i_j=\bar{\Gamma}^i_{jk}d\bar{x}^k$，利用(3.1.17)注意到 $a^j_i=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}$，可得

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}+\Gamma^l_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^k}\right). \tag{3.1.32}$$

由此可见，联络系数 Γ^i_{jk} 不是张量的分量.

最后，在仿射联络空间$(M,\ \nabla)$中，我们可引入平行性的概念. 设 $\gamma:(a,\ b)\longrightarrow M$ 是一条曲线，它在局部坐标系中的方程为

$$x^i=x^i(t),\ a<t<b,$$

于是 γ 的切向量场为

$$\gamma'(t)=\frac{dx^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\gamma,$$

把 γ' 局部地延拓成 M 上向量场，其表示为

$$X=X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x,\quad X^i(x(t))=\frac{dx^i(t)}{dt}.$$

再设 Y 为沿 $\gamma(t)$ 定义的向量场，局部表示为 $Y=Y^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\gamma$，把 $Y(t)$ 局部地延拓成 M 上向量场 $\widetilde{Y}$：

$$\widetilde{Y}=\widetilde{Y}^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\ \widetilde{Y}^i(x(t))=Y^i(t),$$

由(3.1.10′)，(3.1.11)和(3.1.12)，$\widetilde{Y}$ 关于 X 的方向共变导数是

$$\nabla_X\widetilde{Y}=X^j\left(\frac{\partial\widetilde{Y}^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}\widetilde{Y}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

限制在 γ 上，就有

$$\begin{aligned}\nabla_X\widetilde{Y}\,|_\gamma&=\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde{Y}^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}\widetilde{Y}^k\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\gamma\\&=\left(\frac{dY^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}Y^k\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\gamma.\end{aligned}$$

显然，$\nabla_X\widetilde{Y}\,|_\gamma$ 与 γ' 及 Y 的延拓方式无关. 因此，自然地定义

$$\nabla_{\gamma'}Y\overset{\text{def}}{=\!=}\nabla_X\widetilde{Y}\,|_\gamma=\left(\frac{dY^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}Y^k\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\gamma.\tag{3.1.33}$$

定义 3.1.5 设 Y 是沿曲线 $\gamma:(a,b)\to M$ 定义的向量场. 若由(3.1.33)给定的 $\nabla_{\gamma'}Y=0$，则称 Y 沿曲线 γ 平行. 特别，当 γ' 沿自身曲线 γ 平行时，即 $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$，则称 γ 为 M 上的测地线.

显然，Y 沿 γ 平行的局部坐标表示是

$$\frac{dY^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}Y^k\frac{dx^j}{dt}=0,\tag{3.1.34}$$

γ 是 M 的测地线的充要条件是

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{kj}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0. \tag{3.1.35}$$

上式也即 M 上测地线的微分方程.

习　题

1. 证明(3.1.8)式.

2. 设 Γ^i_{jk} 为 M 的仿射联络系数，则 $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 也为 M 的仿射联络系数的充要条件是，存在(1, 2)型张量场 T 使得

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+T^i_{jk}.$$

3. 设(M_1, Γ)和$(M_2, \bar{\Gamma})$分别为 m_1 和 m_2 维仿射联络空间，$(U_1, \varphi_1; x^i)$和$(U_2, \varphi_2; y^a)$分别为 M_1 和 M_2 的坐标图，在积流形 $M=M_1\times M_2$ 的坐标图$(U_1\times U_2, \varphi_1\times\varphi_2; (x^i, y^a))$上定义

$$L^i_{jk}=\Gamma^i_{jk},\ L^a_{bc}=\bar{\Gamma}^a_{bc},\ \text{其余的}\ L^\lambda_{\mu\nu}=0$$

$$(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant m_1;\ 1\leqslant a,\ b,\ c\leqslant m_2;\ 1\leqslant\lambda,\ \mu,\ \nu\leqslant m_1+m_2).$$

则(M, L)也是仿射联络空间.

4. (i)　由(3.1.17)证明(3.1.32).

(ii)　设$(U, \varphi; x^i)$和$(V, \psi; \bar{x}^i)$为 M 的坐标图，Γ^i_{jk} 和 $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 分别为这二坐标图上仿射联络 ∇ 的系数. 通过 $W=U\cap V$ 上平行性的讨论，证明(3.1.32).

5. 由(3.1.18) 和 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\overset{\text{def}}{=\!=}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$，直接证明仿射联络 ∇ 为无挠的充要条件是，对任何坐标图(U, φ, x^i)的自然基向量场$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$成立 $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$.

6. 设 $X_{(i)}i=1, \cdots, m$ 是 C^k 流形 M^m 上的 m 个向量场，它们在各点都是线性无关的. 证明存在仿射联络，使得 $X_{(i)}$均为平行向量场. 即沿 M 上任何曲线都是平行的.

7. 设 M 为 C^{k+1} 流形，∇ 为仿射联络，X, Y 为 M 的 C^k 向量场, $X_p\neq 0$. 以 $C(s)$表示过 p 点的向量场 X 的积分曲线，$C(0)=p$. 以 $C_t^{-1}Y_{C(t)}$ 表示 $Y_{C(t)}$ 沿曲线 C 平行移动到 p 点所得的向量，证明:

$$(\nabla_XY)_p=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(C_t^{-1}Y_{C(t)}-Y_p).$$

8. 设 M 为 C^k 流形，∇ 为 M 的仿射联络，α 为 C^k 映射：$(a, b)\times(c, d)\to M$，$(s, t)\mapsto\alpha(s, t)$. 记 $\frac{\partial\alpha}{\partial s}=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$，$\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$，证明 ∇ 为对称联络的充要条件是对任意的 α 成立

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s},$$

这给出了对称仿射联络的几何意义.

9. 设 $\{e_i\}1\leqslant i\leqslant m$ 为 C^k 流形 M^m 上的局部基向量场. $\{\omega^i\}$为其对偶基向量场，$\{\omega_i^j\}$为仿射联络 1-形式.

(i) 证明：测地线的微分方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^k}{dt}\right)+\frac{\omega^i}{dt}\frac{\omega_i^k}{dt}=0;$$

(ii) 关于 R^2 上直角坐标 x^1, x^2 的自然标架，设联络 1-形式为

$$\omega_1^1=\omega_2^2=0,\quad \omega_2^1=dx^2,\quad \omega_1^2=dx^1.$$

求挠率、曲率，并求测地线微分方程.

§2 黎曼联络

2.1 黎曼联络

在上节中，我们已定义了微分流形 M 上的仿射联络. 当 M 作为欧氏空间的子流形时，由(3.1.6)定义的仿射联络 D 是无挠(对称)的. 此外，根据古典微分几何，R^3 中曲面上的共变微分(绝对微分)算子 D 满足

$$D(X\cdot Y)=DX\cdot Y+X\cdot DY,\ X,\ Y\ \text{为曲面上向量场},$$

这里“·”表示从 R^3 诱导的曲面上的内积. 这些性质对一般的仿射联络未必成立. 现在我们把它推广到黎曼流形上去.

定义 3.2.1 设(M, g)是光滑黎曼流形. M 上的黎曼联络 ∇ 是一个仿射联络，它除了满足(3.1.9)的(i)和(ii)外，还满足

(iii) $\nabla_XY-\nabla_YX=[X, Y]$，即挠率 $T=0$;

(iv) $X\langle Y, Z\rangle=\langle\nabla_XY, Z\rangle+\langle Y, \nabla_XZ\rangle$，其中$\langle\ ,\ \rangle$表示关于 g 的内积.

黎曼联络也称为 Levi-Civita 联络，性质(iii)表明黎曼联络是无挠(对称)的，性质(iv)称为联络 ∇ 保持黎曼内积．因此黎曼联络是一个保持黎曼内积的对称仿射联络．

定理 3.2.1(黎曼几何基本定理)　在一个 C^2 黎曼流形 (M, g) 上存在唯一的黎曼联络 ∇.

证明　先证唯一性．为此，只需证明 $\langle\nabla_X Y, Z\rangle$ 被性质(iii)和(iv)唯一地确定．由(iv)有

$$X\langle Y, Z\rangle=\langle\nabla_X Y, Z\rangle+\langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$
$$Y\langle Z, X\rangle=\langle\nabla_Y Z, X\rangle+\langle Z, \nabla_Y X\rangle,$$
$$-Z\langle X, Y\rangle=-\langle\nabla_Z X, Y\rangle-\langle X, \nabla_Z Y\rangle,$$

将上述三式相加，利用(iii)就得

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_X Y, Z\rangle= & X\langle Y, Z\rangle+Y\langle Z, X\rangle-Z\langle X, Y\rangle \\ & +\langle[X, Y], Z\rangle-\langle[Y, Z], X\rangle \\ & +\langle[Z, X], Y\rangle.\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

上式右边是唯一确定的，故唯一性得证．▌

对于给定的黎曼度量 g，我们用(3.2.1)来定义仿射联络 $\nabla_X Y$，直接计算可以验证，这样定义的 ∇ 满足性质(iii)和(iv)，因此它是一个黎曼联络，这就证明了存在性．

使用局部坐标系 $\{x^i\}$，若取 $X=\frac{\partial}{\partial x^j}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^k}$, $Z=\frac{\partial}{\partial x^l}$，则根据 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}=\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}$，公式(3.2.1)给出

$$2\Gamma^i_{jk}g_{il}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}, \tag{3.2.2}$$

即

$$\Gamma^i_{jk}=\left\{{}_{j\,k}^{\;i}\right\}, \tag{3.2.3}$$

其中

$$\left\{{}_{j\,k}^{\;i}\right\}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) \tag{3.2.4}$$

称为关于黎曼度量 g 的第二类 Christoffel 符号.

由上述讨论可知，仿射联络 ∇ 为黎曼联络的充要条件的充要条件是在局部坐标系下，其联络系数 $\Gamma^i_{jk}=\left\{ {i \atop j\ k} \right\}$.

现设 ∇ 是黎曼流形(M, g)的黎曼联络，$R(X, Y)Z$ 由(3.1.19′)所定义，则

$$R(X, Y, Z, W)\overset{\text{def}}{=\!=}\langle R(Z, W)Y, X\rangle \qquad (3.2.5)$$

确定了一个四阶共变张量场 R；它也称为黎曼流形的(黎曼)曲率张量.

设 $e_1, \cdots, e_m$ 为任意局部标架场，记$\langle e_i, e_j\rangle=g_{ij}$，由于

$$R(e_k, e_l)e_j=\Omega^i_j(e_k, e_l)e_i=R^i_{jkl}e_i$$

所以黎曼曲率张量 R 的分量

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&=R(e_i, e_j, e_k, e_l)\\&=\langle R(e_k, e_l)e_j, e_i\rangle=g_{ih}R^h_{jkl}.\end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

因为

$$\nabla_{e_k}e_j=\omega^i_j(e_k)e_i,\quad e_kg_{ij}=(dg_{ij})(e_k),$$

故有

$$\begin{aligned}(dg_{ij})(e_k)&=\langle\nabla_{e_k}e_i, e_j\rangle+\langle e_i, \nabla_{e_k}e_j\rangle\\&=g_{lj}\omega^l_i(e_k)+g_{il}\omega^l_j(e_k),\end{aligned}$$

即
$$dg_{ij}=g_{ik}\omega^k_j+g_{kj}\omega^k_i.$$

设$\{\omega^i\}$为$\{e_i\}$的对偶标架场，使用以上记号，我们有

定理 3.2.2 对于黎曼流形(M, g)的黎曼联络 ∇，有如下结构方程

$$d\omega^i=-\omega^i_k\wedge\omega^k,\quad g_{ik}\omega^k_j+g_{kj}\omega^k_i=dg_{ij},$$

$$d\omega^i_j=-\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\Omega^i_j,\quad \Omega^i_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l.$$

特别，当$\{e_i\}$为局部规范正交标架场时，$\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$. 若令

$$\omega_i=\delta_{ij}\omega^j=\omega^i,\quad \omega_{ij}=\delta_{ik}\omega^k_j=\omega^i_j,\quad \Omega_{ij}=\delta_{ik}\Omega^k_j=\Omega^i_j,$$

则结构方程成为

$$d\omega_i=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_k,\quad \omega_{ik}+\omega_{ki}=0,$$

$$d\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\Omega_{ij},\tag{3.2.7}$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l.$$

对于(3.2.7)，我们还可有

定理3.2.3 在局部规范正交标架场下，黎曼联络1-形式 ω_{ij} 是由 ω_i 唯一确定的.

证明 设另有联络形式 $\tilde{\omega}_{ij}$，则根据结构方程的第一式，有

$$0=\sum_k\omega_k\wedge(\omega_{ki}-\tilde{\omega}_{ki}),$$

由 Cartan 引理得

$$\omega_{ki}-\tilde{\omega}_{ki}=\sum_j C^j_{ki}\omega_j,\quad C^j_{ki}=C^k_{ji}.$$

因为 ω_{ki} 和 $\tilde{\omega}_{ki}$ 都是反称的，故又有 $C^j_{ki}=-C^j_{ik}$，于是可得

$$C^j_{ki}=0\quad 即\quad \tilde{\omega}_{ki}=\omega_{ki}.\ ▮$$

例1 设 $x\in\boldsymbol{R}^{m+1}$，在点 x 取标架 $e_1,\cdots,e_{m+1}$（不一定是正交的），让标架 $(x;e_1,\cdots,e_{m+1})$ 作一个微小变动，得到 $(x+dx;e_1+de_1,\cdots,e_{m+1}+de_{m+1})$. 向量 dx 和 $de_A(A=1,\cdots,m+1)$ 仍可用原来标架表示，设

$$dx=\omega^A e_A,\qquad (A,B=1,\cdots,m+1)\tag{3.2.8}$$

$$de_A=\omega^B_A e_B,\tag{3.2.9}$$

其中 ω^A, ω^A_B 是关于某些参数 $t_1,\cdots,t_k$ 的一次形式.

对(3.2.8)两边外微分，得

$$0=(d\omega^A)e_A-\omega^A\wedge de_A,$$

将(3.2.9)代入上式，得

$$\sum_A(d\omega^A+\omega^A_B\wedge\omega^B)e_A=0,$$

于是有

$$d\omega^A = -\omega^A_B \wedge \omega^B. \tag{3.2.10}$$

类似地，对(3.2.9)两边外微分，再利用(3.2.9)可得

$$d\omega^A_B = -\omega^A_C \wedge \omega^C_B. \tag{3.2.11}$$

(3.2.10)和(3.2.11)就是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 的结构方程. 若 $e_1, \cdots, e_{m+1}$ 是规范正交标架，则对 $\langle e_A, e_B \rangle = \delta_{AB}$ 两边外微分还可得

$$\omega^A_B + \omega^B_A = 0. \tag{3.2.12}$$

现设 $S^m(c) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^{m+1} \,\middle|\, \|x\| = \dfrac{1}{c},\ c \text{ 为正常数} \right\}$. 在 $S^m(c)$ 的任意点 x，取 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 的规范正交标架 $e_1, \cdots, e_m, e_{m+1}$，使

$$e_{m+1} = cx,$$

则 e_{m+1} 是 $S^m(c)$ 在 x 点的单位外法向量，于是

$$de_{m+1} = c\,dx. \tag{3.2.13}$$

另一方面，当 x 限定在 $S^m(c)$ 上变动时，dx 与 $S^m(c)$ 相切于 x，故(3.2.8)成为

$$dx = \omega^i e_i \quad (1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant m). \tag{3.2.14}$$

将它代入(3.2.13)，得

$$de_{m+1} = c\,\omega^i e_i, \tag{3.2.15}$$

再由(3.2.9)和(3.2.12)，得

$$de_{m+1} = \omega^i_{m+1} e_i. \tag{3.2.16}$$

比较以上两式，便有

$$\omega^i = \frac{1}{c}\omega^i_{m+1}, \quad \omega^{m+1}_i = -\omega^i_{m+1}. \tag{3.2.17}$$

利用(3.2.11)和(3.2.17)，可得

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \frac{1}{c} d\omega^i_{m+1} = \frac{1}{c}(-\omega^i_j \wedge \omega^j_{m+1}) \\ &= -\omega^i_j \wedge \omega^j. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

同理，有

$$d\omega^i_j = -\omega^i_A \wedge \omega^A_j = -\omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_{m+1} \wedge \omega^{m+1}_j$$

$$=-\omega_k^i\wedge\omega_j^k+\Omega_j^i,\tag{3.2.19}$$

其中

$$\Omega_j^i=c^2\omega^i\wedge\omega^j.$$

(3.2.18)和(3.2.19)式便是球面 $S^m(c)$ 的结构方程.

例 2 设 V^{m+1} 为 $m+1$ 维向量空间, $f_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,$ $f_{m+1}=(0,\cdots,0,1)$ 为标准基向量. 设 $x, y\in V^{m+1}$, 它们的分量表示分别为 $x=(x^1,\cdots,x^{m+1})$, $y=(y^1,\cdots,y^{m+1})$, 定义映射$\langle\ ,\ \rangle$: $V^{m+1}\times V^{m+1}\to\boldsymbol{R}$ 如下:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^m x^iy^i+\frac{1}{c}x^{m+1}y^{m+1},\quad c=\text{为常数.}$$

我们把满足关系式

$$\langle x,x\rangle=\frac{1}{c}$$

的点的轨迹

$$S=\left\{x\in V^{m+1}\,\middle|\,\langle x,x\rangle=\frac{1}{c}\right\}\tag{3.2.20}$$

称为广义球面.

考虑线性变换 $A:V^{m+1}\to V^{m+1}x\mapsto Ax\equiv x^*$ 如下:

$$x^{*\alpha}=A_\beta^\alpha x^\beta,\quad \alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ m+1.$$

它将广义球面变成其自身的充要条件是

$$l_{\alpha\beta}=A_\alpha^\gamma A_\beta^\lambda l_{\gamma\lambda},$$

其中

$$(l_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}I_{m\times m} & 0\\ 0 & \frac{1}{c}\end{pmatrix}.$$

这样的变换的全体构成一个群 G. 可以证明对 S 上任一点 x 都存在 G 中的一个变换 G_x, 它将 x 变到 f_{m+1}, 即有 $G_x^{-1}f_{m+1}=x$. 再设

$$G_x^{-1}f_i=e_i,\qquad i=1,\ \cdots,\ m,$$

于是有

$$\langle x,e_i\rangle=0,\ \langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij},\qquad i,\ j=1,\ \cdots,\ m.$$

对任一点 $x\in S$，引入 $e_1(x)$, …, $e_m(x)$, x，显然它们是线性无关的，故可令

$$dx=\omega^i e_i+\omega^{m+1}x,$$
$$de_i=\omega_i^j e_j+\omega_i^{m+1}x.$$

仿例 1，易得

$$\omega^{m+1}=0,\ \omega_i^{m+1}=-c\omega^i,\ \omega_i^j=-\omega_j^i$$

故

$$dx=\omega^i e_i,\quad de_i=\omega_i^j e_j-c\omega^i x. \tag{*}$$

这样可在广义球面 S 上引入黎曼度量

$$ds^2=\langle dx,\ dx\rangle=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^m)^2.$$

以下我们来求对应于这个度量的黎曼联络 1-形式. 对(*)两边外微分，利用(*)，便可得

$$d\omega^i=-\omega_j^i\wedge\omega^j,\ \omega_j^i+\omega_i^j=0,$$
$$d\omega_i^j=-\omega_k^j\wedge\omega_i^k+c\omega^j\wedge\omega^i.$$

由黎曼联络的唯一性(定理 3.2.3)，即知 ω_i^j 为上述黎曼流形的联络 1-形式，且其曲率形式为

$$\Omega_j^i=\frac{1}{2}R_{jkl}^i\omega^k\wedge\omega^l=c\omega^i\wedge\omega^j.$$

引入上述度量的广义球面成为常曲率黎曼流形(见定义 3.3.3).

2.2 共变微分

设 ∇ 是微分流形 M 上的仿射联络，则对任意的 $X\in\mathscr{X}(M)$，映射 ∇_X: $\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$满足(3.1.9). 以 $\mathscr{C}(T_s^r(M))$表示 M 上$(r,\ s)$型 C^∞ 张量场的集合，用下述方式可诱导映射 ∇_X: $\mathscr{C}(T_s^r(M))\to\mathscr{C}(T_s^r(M))$.

设$\{e_i\}$是 M 的局部标架场，$\{\omega^i\}$为其对偶标架场. 对任一的 $X\in\mathscr{X}(M)$，我们用下式定义 $\nabla_X\omega^i$:

$$X(\omega^i(e_j))=(\nabla_X\omega^i)(e_j)+\omega^i(\nabla_X e_j).$$

根据(3.1.11)，上式成为$(\nabla_X\omega^i)(e_j)=-\omega^i_j(X)$，故得

$$\nabla_X\omega^i=-\omega^i_j(X)\omega^j.$$

相仿可得

$$\begin{aligned}\nabla_X(a_h\omega^h)&=(Xa_h)\omega^h-a_h\omega^h_i(X)\omega^i\\&=(Xa_h)\omega^h+a_h\nabla_x\omega^h.\end{aligned}$$

因此诱导映射∇_X: $\mathscr{C}(T^0_1(M))\to\mathscr{C}(T^0_1(M))$也满足条件(3.1.9).

同样，设$e\in\mathscr{C}(T^1_0(M))$，$\omega\in\mathscr{C}(T^0_1(M))$，可定义$\nabla_X(e\otimes\omega)$。此外，设$\omega=a_h\omega^h$，$Y=b^je_j$，易得

$$(\nabla_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega(\nabla_XY).$$

一般地，我们可给出

定义 3.2.2 设 M 为光滑流形. ∇ 是 M 上对称仿射联络. $\mathscr{C}(T^r_s(M))$为 M 上(r, s)型 C^∞ 张量场空间. 对于 $X\in\mathscr{X}(M)$，沿 X 方向的共变导数是一个映射

∇_X:$\mathscr{C}(T^r_s(M))\to\mathscr{C}(T^r_s(M))$，它满足下述法则：

(i) $\nabla_Xf=X(f)$，$f\in C^\infty(M)$；

(ii) 若$\omega\in A^1(M)=\mathscr{C}(T^0_1(M))$，则对任意的$Y\in\mathscr{X}(M)$

$$(\nabla_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega(\nabla_XY);$$

(iii) 若$\phi\in\mathscr{C}(T^r_s(M))$，则对任意的$\omega^1, \cdots, \omega^r\in A^1(M)$，$Y_1, \cdots, Y_s\in\mathscr{X}(M)$

$$\begin{aligned}&\nabla_X\phi(\omega^1, \cdots, \omega^r, Y_1, \cdots, Y_s)\\&=\nabla_X(\phi(\omega^1, \cdots, \omega^r, Y_1, \cdots, Y_s))\\&\quad-\sum_{i=1}^{r}\phi(\omega^1, \cdots, \nabla_X\omega^i, \cdots, \omega^r, Y_1, \cdots, Y_s)\\&\quad-\sum_{j=1}^{s}\phi(\omega^1, \cdots, \omega^r, Y_1, \cdots, \nabla_XY_j, \cdots, Y_s).\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

对于沿 X 方向的共变导数，我们有

命题 3.2.4 设 $\theta\in A^r(M)$, $\omega\in A^s(M)$，则有

$$\nabla_X(\theta\wedge\omega)=\nabla_X\theta\wedge\omega+\theta\wedge\nabla_X\omega \tag{3.2.22}$$

和

$$d\theta(X_1,\cdots,X_{r+1})=\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}\nabla_{X_\alpha}\theta\cdot(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1}),$$

$$X_1,\cdots,X_{r+1}\in\mathscr{X}(M). \tag{3.2.23}$$

证明 (3.2.22)式可由共变导数的定义直接验证．此外，根据(2.3.10)直接算得

$$\begin{aligned}
&d\theta(X_1,\cdots,X_{r+1})\\
&=\sum_{\alpha=1}^{r+1}(-1)^{\alpha+1}X_\alpha(\theta\cdot(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1}))\\
&\quad+\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta}\theta([X_\alpha,X_\beta],X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,\hat{X}_\beta,\cdots,X_{r+1})\\
&=\sum_\alpha(-1)^{\alpha+1}\nabla_{X^\alpha}(\theta(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1}))\\
&\quad+\sum_{\alpha<\beta}(-1)^{\alpha+\beta}\theta(\nabla_{X\alpha}X_\beta-\nabla_{X_\beta}X_\alpha,X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,\\
&\qquad\hat{X}_\beta,\cdots,X_{r+1})\\
&=\sum_\alpha(-1)^{\alpha+1}\nabla_{X\alpha}\theta(X_1,\cdots,\hat{X}_\alpha,\cdots,X_{r+1}).
\end{aligned}$$

以下给出共变导数在自然标架下的表示式．设$(U,\varphi;x^i)$为 M 的一个坐标图，

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则有

$$\nabla_XY=X^j\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=X^jY^i_{,j}\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{3.2.24}$$

其中

$$Y^i_{,j}\equiv\nabla_jY^i=\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}Y^k. \tag{3.2.25}$$

设$(\overline{U}, \overline{\varphi}; \overline{x}^i)$是另一坐标图. 记

$$X=\overline{X}^k \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k},\ Y=\overline{Y}^k \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k}.$$

类似地
$$\nabla_X Y=\overline{X}^k \overline{Y}^i_{,k} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i},$$

其中
$$\overline{Y}^i_{,k}=\frac{\partial \overline{Y}^i}{\partial \overline{x}^k}+\overline{\Gamma}^i_{kj}\overline{Y}^j.$$

因为

$$\nabla_X Y=\overline{X}^k \overline{Y}^i_{,k} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}=X^j \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} \overline{Y}^i_{,k} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^l}, \tag{3.2.26}$$

比较(3.2.24)和(3.2.26)得

$$Y^i_{,j}=\overline{Y}^l_{,k} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l}.$$

这表示由(3.2.25)定义的$Y^i_{,j}$是一个(1, 1)型张量的分量.

相仿,对于

$$\phi=\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

则有

$$\nabla_X\phi=X^k\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}, \tag{3.2.27}$$

其中

$$\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}=\frac{\partial \phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}+\sum_{t=1}^{r}\Gamma^{i_t}_{lk}\phi^{i_1\cdots i_{t-1}li_{t+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$$
$$-\sum_{t=1}^{s}\Gamma^l_{j_tk}\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{t-1}lj_{t+1}\cdots j_s}, \tag{3.2.28}$$

是$(r, s+1)$型张量的分量,这是经典意义下张量场$\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$求共变导数(绝对微分)的公式.

定义 3.2.3 若对于任何$X\in\mathscr{X}(M)$均有$\nabla_X\phi=0$, 则称张

量场 ϕ 关于联络 ∇ 是平行的. 设 $\gamma:(a, b)\to M$ 是 M 的曲线, γ' 为其切向量, 若 $\nabla_{\gamma'}\phi=0$, 则称 ϕ 沿曲线 γ 是平行的.

由(3.2.27)知, 当且仅当 $\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}=0$ 时, ϕ 是平行的. 又由(3.2.23), 若微分形式 θ 是平行的, 则它是闭的, 即 $d\theta=0$.

定理 3.2.5 黎曼流形 (M, g) 上的对称仿射联络 ∇ 为黎曼联络的充要条件是 g 关于 ∇ 是平行的.

证明 由定义 3.2.2, 对任意的 $X, Y, Z\in\mathscr{X}(M)$

$$\nabla_X g(Y, Z)=\nabla_X(g(Y, Z))-g(\nabla_X Y, Z)$$
$$-g(Y, \nabla_X Z).$$

另一方面, 由黎曼联络的性质 (iii), 有

$$\nabla_X(g(Y, Z))=g(\nabla_X Y, Z)+g(Y, \nabla_X Z).$$

综合上述两式, 定理得证. ▌

现设向量场 X_1, X_2 沿曲线 γ 是平行的, 即

$$\nabla_{\gamma'}X_\alpha=0, \quad (\alpha=1, 2).$$

于是, 沿曲线 γ

$$\frac{d}{dt}\langle X_\alpha, X_\beta\rangle=\gamma'\langle X_\alpha, X_\beta\rangle$$
$$=\langle\nabla_{\gamma'}X_\alpha, X_\beta\rangle+\langle X_\alpha, \nabla_{\gamma'}X_\beta\rangle$$

由此即得

$$=0, \ (\alpha, \beta=1, 2).$$

命题 3.2.6 设 ∇ 是黎曼流形 (M, g) 的黎曼联络, 则在沿曲线的平行移动(关于 ∇)下, 向量的长度及两向量间的夹角是不变的.

特别, 当曲线 γ 的切向量 γ' 沿曲线为平行时, 即 $\nabla_{\gamma'}\gamma'=0$, 则称此曲线 γ 为 (M, g) 的测地线. 有关测地线的理论, 我们将在第四章中阐述.

在仿射联络空间中, 由方向共变导数可引出一般共变微分.

定义 3.2.4 设 (M, ∇) 是仿射联络空间, M 上的共变微分

(绝对微分)是一个映射 $\nabla: \mathscr{C}(T^r_s(M)) \to \mathscr{C}(T^r_{s+1}(M))$, $\phi \mapsto \nabla\phi$, 它由下式定义: 对任意的 $\theta^1, \cdots, \theta^r \in A^1(M)$ 和 $X_1, \cdots, X_s, X \in \mathscr{X}(M)$, 有

$$\nabla\phi(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s; X) \overset{\text{def}}{=} \nabla_X\phi \cdot(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s). \tag{3.2.29}$$

于是, 当且仅当 ϕ 的共变微分 $\nabla\phi = 0$ 时, ϕ 是平行的.

由共变微分的定义, 对于 (r, s) 型张量场

$$\phi = \phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

利用(3.2.27)和(3.2.28), 可知 $\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}$ 正是 $(r, s+1)$ 型张量场 $\nabla\phi$ 的分量, 即有

$$\nabla\phi = \phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\, dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}, \tag{3.2.30}$$

其中 $\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}$ 由(3.2.28)定义.

以下考虑在一般标架场 $\{e_i\}$ (不一定是幺正标架场) 下 $\nabla\phi$ 的表达式. 设 $\{\omega^i\}$ 为对偶标架场, 根据(3.1.11)和定义 3.2.2 中的(ii),

$$\nabla_X e_i = \omega^j_i(X) e_j, \quad \nabla_X \omega^i = -\omega^i_j(X)\omega^j.$$

讨论(1, 1)型张量场

$$\phi = \phi^i_j e_i \otimes \omega^j.$$

利用上式和定义 3.2.4, 有

$$\nabla\phi(\cdot, \cdot, X) = \nabla_X\phi(\cdot, \cdot),$$

而

$$\begin{aligned}\nabla_X\phi &= (X\phi^i_j) e_i \otimes \omega^j + \phi^i_j (\nabla_X e_i) \otimes \omega^j + \phi^i_j e_i \otimes \nabla_X \omega^j \\ &= (d\phi^i_j(X) + \phi^k_j \omega^i_k(X) - \phi^i_k \omega^k_j(X)) e_i \otimes \omega^j,\end{aligned}$$

故

$$\nabla\phi(\cdot,\ \cdot,\ X)=(d\phi^i_j(X)+\phi^k_j\omega^i_k(X)$$
$$-\phi^i_k\omega^k_j(X))e_i\otimes\omega^j(\cdot,\ \cdot).$$

另一方面，若记 $\nabla\phi=\phi^i_{j,k}\omega^k\otimes e_i\otimes\omega^j$，则

$$\nabla\phi(\cdot,\ \cdot,\ X)=\phi^i_{j,k}\omega^k(X)(e_i\otimes\omega^j)(\cdot,\ \cdot).$$

比较以上两式，便得

$$\phi^i_{j,k}\omega^k=d\phi^i_j+\phi^k_j\omega^i_k-\phi^i_k\omega^k_j\overset{\text{def}}{=\!=\!=}D\phi^i_j.$$

$D\phi^i_j$ 称为 ϕ^i_j 关于仿射联络 ∇ 的共变微分或绝对微分，上式就是它的定义式. 应该注意，这里的 $\phi^i_{j,k}$ 是关于一般标架场$\{e_i\}$和$\{\omega^i\}$而言的，它不同于(3.2.28)那样. 后者是在自然标架场$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$下表示的.

在有的文献中为区别起见，将(3.2.28)中左边记为 $\nabla_k\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$. 以下，我们在不同的标架场下表示同一个张量的分量时，往往使用相同的记号，这一点初学者要特别警惕.

一般地，对于

$$\phi=\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_r},$$

我们有

$$\nabla\phi=\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\omega^k\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s},\tag{3.2.31}$$

其中

$$\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\omega^k=d\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}+\sum_{t=1}^{r}\phi^{i_1\cdots i_{t-1}li_{t+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\omega^{i_t}_l$$
$$+\sum_{t=1}^{s}\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{t-1}lj_{t+1}\cdots j_s}\omega^l_{j_t}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}D\phi^{i_1\cdots i}{}_{j_1\cdots j_s}\tag{3.2.32}$$

称为张量 $\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 的共变微分，于是(3.2.31)也可以写成

$$\nabla\phi=(D\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes\omega^{j_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{j_s}.$$

因为

$$\nabla(\phi\otimes\psi)=\nabla\phi\otimes\psi+\phi\otimes\nabla\psi,$$

故写成分量形式就有

$$(\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\psi^{h_1\cdots h_p}{}_{k_1\cdots k_q})_{,l}$$
$$=\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,l}\psi^{h_1\cdots h_p}{}_{k_1\cdots k_q}+\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\psi^{h_1\cdots h_p}{}_{k_1\cdots k_q,l},\tag{3.2.33}$$

且此式当包含缩并运算时仍然成立.

对于黎曼流形$(M,\ g)$的黎曼联络∇, 我们有$\nabla g=0$, 故

$$g_{ij,k}=0.\tag{3.2.34}$$

于是,对于共轭张量

$$g^{ij}e_i\otimes e_j,\qquad g^{ij}g_{ik}=\delta^j_k,$$

也有

$$g^{ij}{}_{,k}=0.\tag{3.2.35}$$

并且,特别也有

$$\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\equiv(g^{i_1l}\phi_l{}^{\cdot i_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})_{,k}$$
$$=g^{i_1l}\phi_l{}^{\cdot i_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}$$
$$\phi_l{}^{\cdot i_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}=(g_{i_1l}\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})_{,k}$$
$$=g_{i_1l}\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k},$$

等关系式.

ϕ 的二阶共变微分$\nabla^2\phi$定义为$\nabla(\nabla\phi)$, 它是$(r,\ s+2)$型张量场. 对于任意的$\theta^1,\cdots,\theta^r\in A^1(M)$和$X_1,\cdots,X_s,X,\ Y\in\mathscr{X}(M)$, 根据定义 3.2.4 和 3.2.2, 就有

$$\nabla^2\phi(\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r,\ X_1,\ \cdots,\ X_s;\ X,\ Y)$$
$$=(\nabla_Y(\nabla\phi))(\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r,\ X_1,\ \cdots,\ X_s;\ X)$$
$$=\nabla_Y(\nabla_X\phi(\theta^1,\ \cdots,\ \theta_r,\ X_1,\ \cdots,\ X_s))$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{r}\nabla_X\phi(\theta^1,\ \cdots,\ \nabla_Y\theta^\alpha,\ \cdots,\ \theta^r,\ X_1,\ \cdots,\ X_s)$$
$$-\sum_{\beta=1}^{s}\nabla_X\phi(\theta^1,\ \cdots,\ \theta^r,\ X_1,\ \cdots,\ \nabla_YX_\beta,\ \cdots,\ X_s)$$

$$-\nabla_Y X\phi(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)$$
$$=(\nabla_Y(\nabla_X\phi))(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s)$$
$$-\nabla_Y X\phi(\theta^1, \cdots, \theta^r, X_1, \cdots, X_s),$$

因此

$$\nabla^2\phi(\cdots; X, Y)=(\nabla_Y(\nabla_X\phi))(\cdots)-\nabla_Y X\phi(\cdots). \tag{3.2.36}$$

对于对称仿射联络 ∇，定义

$$R(X, Y)\phi \xlongequal{(\text{def.})} \nabla_X\nabla_Y\phi-\nabla_Y\nabla_X\phi-\nabla_{[X,Y]}\phi, \tag{3.2.37}$$

则由(3.2.36)和(3.2.37)，使得下述命题.

命题 3.2.7 对于张量场 ϕ 和任何 $X, Y\in\mathscr{X}(M)$，成立 Ricci 恒等式:

$$\nabla^2\phi(\cdots; X, Y)-\nabla^2\phi(\cdots; Y, X)$$
$$=R(Y, X)\phi(\cdots)=-R(X, Y)\phi(\cdots). \tag{3.2.38}$$

在一般标架场下，Ricci 恒等式可表示为

$$\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,kl}-\phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{\alpha-1}hj_{\alpha+1}\cdots j_s}R^h{}_{j_\alpha kl}$$
$$-\sum_{\beta=1}^{r}\phi^{i_1\cdots i_{\beta-1}hi_{\beta+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}R^{i_\beta}{}_{hkl}. \tag{3.2.38'}$$

这是一个关于交换求共变导数次序的重要公式. 对于通常的欧氏空间，由于欧氏联络的曲率张量恒消失(见下面§3)，因而可随便交换求导的次序. 但在一般的黎曼流形上，当交换求共变导数的次序时，必须遵循此 Ricci 恒等式. 这也是初学者特别要注意的地方.

习 题

1. 证明由(3.2.1)定义的仿射联络 $\nabla_X Y$ 是一个黎曼联络.

2. 设 (M, g) 为黎曼流形, 在自然标架下, $\left\{ {i \atop jk} \right\}$为克氏符号, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$为任意向量场, 证明: 由

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \xlongequal{\text{(def.)}} \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \left\{ {k \atop ij} \right\} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

定义的 ∇ 是黎曼联络.

3. 设(M, g)为黎曼流形. $f \in C^2(M)$, $X \in \mathscr{X}(M)$, 且 X 局部可表成$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, f 的梯度 $\mathrm{grad} f$ 局部地可表成 $\mathrm{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$, 向量场 X 的散度 $\mathrm{div} X = X^i_{;i}$. 证明:

$$\mathrm{div}\ X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial \sqrt{G} X^i}{\partial x^i},$$

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad} f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

式中 $$G = \det(g_{ij}).$$

4. 设 M 为光滑流形. ∇ 为对称仿射联络, 设$\{e_i\}$为局部基向量场, $\{\omega^i\}$和$\{\omega^i_j\}$分别是对偶基和联络 1-形式. 证明:

$$\nabla_X \omega^i = -\omega^i_j(X) \omega^j, \quad \forall X \in \mathscr{X}(M).$$

5. 设(M^m, g)为黎曼流形, $\omega = \omega_{i_1 \cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ 为 m-形式, 其中

$$\omega_{i_1 \cdots i_m} = \sqrt{G}\, \varepsilon_{i_1 \cdots i_m},$$

$$\varepsilon_{i_1 \cdots i_m} = \begin{cases} 0, \ i_1, \cdots, i_m & \text{中有相同时}, \\ 1, \ (i_1, \cdots, i_m) & \text{为偶置换}, \\ -1, \ (i_1, \cdots, i_m) & \text{为奇置换}. \end{cases}$$

证明: $\omega_{i_1 \cdots i_m ; k} = 0$, 即 ω 是平行的.

6. 证明: (3.2.28)定义的 $\phi^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s ; k}$ 是$(r, s+1)$型张量的分量.

7. 在黎曼流形中, 对称仿射联络若满足下述条件之一:

(i) 沿任何曲线的平行移动时, 向量的长度不变;

(ii) 沿任何曲线的平行移动时, 向量间的夹角不变,

则此仿射联络是黎曼联络.

8. 设(M^m, g)为连通的黎曼流形, $X_{(1)}, \cdots, X_{(r)}$ $(r \leqslant m)$均为平行向量场. 证明:

(i) 如果它们在 M 的某一点线性无关, 则它们在 M 的各点是线性无关的;

(ii) 如果 $r=m$ 且它们在一点线性无关，则 (M, g) 的曲率张量为零张量.

9. 设 (M^m, g) 为黎曼流形，它具有 C^∞ 余向量标架场 $\theta^1, \cdots, \theta^m$ 构成的局部基. 若存在 m^2 个 C^∞ 的 1-形式 $\theta_j^k\ 1\leqslant j, k\leqslant m$, 它们满足下述两个条件:

(i) $d\theta^i=-\theta_j^i\wedge\theta^j$,

(ii) $dg_{ij}=g_{kj}\theta_i^k+g_{ik}\theta_j^k$,

其中 $g_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle$, $\{e_i\}$ 为 $\{\theta^i\}$ 的对偶标架场. 证明下式定义的 ∇ 是黎曼联络

$$\nabla_X(f^ie_i)=X(f^i)e_i+f^i\theta_i^j(X)e_j,\ \forall X\in\mathscr{X}(M),\ f^i\in C^\infty(M).$$

10. 设 ∇ 为流形 M 上的对称仿射联络. $\phi\in\mathscr{C}(T_s^r(M))$, $\psi\in\mathscr{C}(T_q^p(M))$, 则对于任意向量场 X

$$\nabla_X(\phi\otimes\psi)=\nabla_X\phi\otimes\psi+\phi\otimes\nabla_X\psi,$$

特别, 若 $\theta\in A^s(M)$, $\omega\in A^r(M)$, 则有

$$\nabla_X(\theta\wedge\omega)=\nabla_X\theta\wedge\omega+\theta\wedge\nabla_X\omega.$$

11. 设 (M_1, g_1), (M_2, g_2) 均为黎曼流形. $\nabla^{(1)}$、$\nabla^{(2)}$ 分别为它们的黎曼联络. $F: M_1\to M_2$ 为等距微分同胚, 即 $g_1=F^*g_2$, 证明 $F_*(\nabla_X^{(1)}Y)=\nabla_{F_*X}^{(2)}F_*Y$, $\forall X, Y\in\mathscr{X}(M_1)$.

12. 设 (M^m, g) 为连通黎曼流形, ∇ 为黎曼联络, A 为二阶对称张量且 $\nabla A=0$. 定义线性映射 $A^*: T_p(M)\to T_p(M)$, $\forall p\in M$ 如下: 对任意的 X, $Y\in T_p(M)$

$$\langle A^*(X), Y\rangle_p\overset{\text{def}}{=\!=}A(X, Y)(p),$$

设 ρ_i 为 A^* 的特征值, $\tilde{e}_i$ 为其相应的单位特征向量, 证明:

(i) 所有特征值在 M 上均为常数;

(ii) 若 $\rho_h\neq\rho_k$, 则 $\langle\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle=0$. 设 $\{\tilde{e}_i\}$ 为 A^* 的特征向量标架, 使得 $\langle\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle=\delta_{ij}$, 则当 $\rho_h\neq\rho_k$ 时, 有

$$\langle\nabla_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_h, \tilde{e}_k\rangle=0,\ h,\quad i,\ k=1, \cdots, m.$$

(iii) 设 ρ_i 为 r 重根, 对应特征向量为 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_r$, 则 $\tilde{e}_{r+1}, \cdots, \tilde{e}_m$ 生成的分布 $\mathscr{D}$ 是完全可积的.

13. 设 $\phi=\phi_j^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$ 是 (1, 1) 型张量场, 在自然标架下证明 Ricci 恒等式

$$\phi_{j,kl}^i-\phi_{j,lk}^i=\phi_h^iR^h{}_{jkl}-\phi_j^kR^i{}_{hkl}.$$

§3 曲　　率

3.1 曲率张量

设(M, g)为黎曼流形，∇ 为黎曼联络，我们已定义曲率算子$R(X, Y)$和曲率张量 R:

对于 $X, Y, Z, W\in\mathscr{X}(M)$,

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z, \tag{3.3.1}$$

$$R(X, Y, Z, W)=\langle R(Z, W)Y, X\rangle, \tag{3.3.2}$$

它们对刻画黎曼流形的几何性质是十分重要的．我们先证明

命题 3.3.1 对任意的向量场 $X, Y, Z, W\in\mathscr{X}(M)$，曲率算子和曲率张量具有下述关系式:

$$\begin{cases}(\mathrm{i})\ R(X, Y)Z+R(Y, X)Z=0,\\ (\mathrm{ii})\ R(X, Y)Z+R(Y, Z)X+R(Z, X)Y=0,\\ (\mathrm{iii})\ R(X, Y, Z, W)=-R(Y, X, Z, W)\\ \qquad\qquad\qquad=-R(X, Y, W, Z),\\ (\mathrm{iv})\ R(X, Y, Z, W)=R(Z, W, X, Y).\end{cases} \tag{3.3.3}$$

证明 由(3.3.1)即得关系式(i).

由(3.3.1)，∇ 的无挠性及向量场的 Jacobi 恒等式得

$$\begin{aligned}&R(X, Y)Z+R(Y, Z)X+R(Z, X)Y\\ &=\nabla_X(\nabla_YZ-\nabla_ZY)+\nabla_Y(\nabla_ZX-\nabla_XZ)\\ &\quad+\nabla_Z(\nabla_XY-\nabla_YX)-\nabla_{[X,Y]}Z-\nabla_{[Y,Z]}X-\nabla_{[Z,X]}Y\\ &=[X[Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0.\end{aligned}$$

这就得关系式(ii)．由证明过程可见，关系式(i)和(ii)对任何对称仿射联络均成立．关系式(ii)称为第一 Bianchi 恒等式．特别对于黎曼联络，它可以表成

(ii)′ $R(W, Z, X, Y)+R(W, X, Y, Z)$

$$+R(W, Y, Z, X)=0.$$

关系式(iii)来自 $R(X, Y)=-R(Y, X)$ 和黎曼联络 ∇ 的性质(iv)——保持黎曼内积.

最后，类似于(ii)′，可有另外三式

$$R(X, Y, Z, W)+R(X, Z, W, Y)+R(X, W, Y, Z)=0,$$

$$R(Y, Z, W, X)+R(Y, W, X, Z)+R(Y, X, Z, W)=0,$$

$$R(Z, W, X, Y)+R(Z, X, Y, W)+R(Z, Y, W, X)=0.$$

将以上四式相加，利用(iii)即得关系式(iv). ▌

设 $e_1, \cdots, e_m$ 是一般局部标架场，根据(3.2.6)

$$R_{ijkl}=R(e_i, e_j, e_k, e_l)=g_{ih}R^h{}_{jkl},$$

$$R^i{}_{jkl}e_i=R(e_k, e_l)e_j.$$

我们有分量形式的关系式

推论 对于 $1\leqslant i, j, k, l\leqslant m=\dim M$，有

$$\begin{cases}\text{(i)} & R^i{}_{jkl}+R^i{}_{jlk}=0,\\ \text{(ii)} & R^i{}_{jkl}+R^i{}_{klj}+R^i{}_{ljk}=0,\\ & R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0,\\ \text{(iii)} & R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk},\\ \text{(iv)} & R_{ijkl}=R_{klij}.\end{cases}\tag{3.3.4}$$

特别，$e_1, \cdots, e_m$ 为自然标架场时，以上即为经典理论中黎曼曲率张量分量间的关系式.

命题 3.3.2 设 (M, g) 为黎曼流形，∇ 为黎曼联络，R 为 M 的黎曼曲率张量，则对于任意的 $X, Y, Z, V, W\in\mathscr{X}(M)$，成立

$$\nabla R(V, W, X, Y; Z)+\nabla R(V, W, Y, Z; X)$$

$$+\nabla R(V, W, Z, X; Y)=0, \tag{3.3.5}$$

它称为第二 Bianchi 恒等式.

证明 根据共变微分的定义. 黎曼联络 ∇ 的性质及(3.3.2),

$$\begin{aligned}
&\nabla R(V, W, Y, Z; X)=(\nabla_X R)(V, W, Y, Z)\\
&=X\langle R(Y, Z)W, V\rangle-\langle R(Y, Z)W, \nabla_X V\rangle\\
&\quad-\langle R(Y, Z)\nabla_X W, V\rangle-\langle R(\nabla_X Y, Z)W, V\rangle\\
&\quad-\langle R(Y, \nabla_X Z)W, V\rangle=\langle\nabla_X(R(Y, Z)W), V\rangle\\
&\quad-\langle R(Y, Z)\nabla_X W, V\rangle-\langle R(\nabla_X Y, Z)W, V\rangle\\
&\quad-\langle R(Y, \nabla_X Z)W, V\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\nabla R(V, W, X, Y; Z)+\nabla R(V, W, Y, Z; X)\\
&\quad+\nabla R(V, W, Z, X; Y)=\langle\nabla_X(R(Y, Z)W)\\
&\quad+\nabla_Y(R(Z, X)W)+\nabla_Z(R(X, Y)W), V\rangle\\
&\quad-\langle R(Y, Z)\nabla_X W+R(Z, X)\nabla_Y W+R(X, Y)\nabla_Z W, V\rangle\\
&\quad-\langle R(\nabla_X Y, Z)W+R(Z, \nabla_Y X)W, V\rangle\\
&\quad-\langle R(\nabla_Y Z, X)W+R(X, \nabla_Z Y)W, V\rangle\\
&\quad-\langle R(\nabla_Z X, Y)W+R(Y, \nabla_X Z)W, V\rangle,
\end{aligned}$$

而由 $R(X, Y)Z$ 的定义, 黎曼联络的对称性及向量场的 Jacobi 恒等式, 得

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(R(Y, Z)W)+\nabla_Y(R(Z, X)W)+\nabla_Z(R(X, Y)W)\\
&=R(X, Y)\nabla_Z W+R(Y, Z)\nabla_X W+R(Z, X)\nabla_Y W\\
&\quad+R([X, Y], Z)W+R([Z, X], Y)W\\
&\quad+R([Y, Z], X)W.
\end{aligned}$$

由这两式及联络的对称性, $R(X, Y)=-R(Y, X)$, 即得(3.3.5). ∎

现设 $e_1, \cdots, e_m$ 为 (M, g) 的局部规范正交标架场, $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 为其对偶标架场, 则有结构方程(3.2.7).

外微分(3.2.7)的第一式有

$$0=-\sum_j d\omega_{ij}\wedge\omega_j+\sum_j \omega_{ij}\wedge d\omega_j$$

$$=-\sum_j \Omega_{ij}\wedge\omega_j$$

由此即得第一 Bianchi 恒等式

$$\sum_j \Omega_{ij}\wedge\omega_j=0. \tag{3.3.7}$$

或利用(3.2.7)的第三式,它可改写成

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0. \tag{3.3.8}$$

这是(3.3.4)(ii)在正交规范标架场下的情况.

外微分(3.2.7)的第二式可得

$$d\Omega_{ij}=\sum_k \Omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\Omega_{kj}, \tag{3.3.9}$$

此即第二 Bianchi 恒等式. 利用张量场 $\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 的共变微分 $D\phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$的表示式(3.2.32), DR_{ijkl} 为 R_{ijkl} 关于规范正交标架下的共变微分

$$DR_{ijkl}=dR_{ijkl}-\sum_h R_{ijkh}\omega_{hl}-\sum_h R_{ijhl}\omega_{hk}-\sum_h R_{ihkl}\omega_{hj}$$

$$-\sum_h R_{hjkl}\omega_{hi}=\sum_h R_{ijkl,h}\omega_h,$$

则(3.3.9)式就等价于

$$R_{ijkl,h}+R_{ijlh,k}+R_{ijhk,l}=0. \tag{3.3.10}$$

对于自然标架场,也有类似的表达式.

命题 3.3.3 在任何点 $p\in M$, 向量 $(R(X,Y)Z)_p$ 仅依赖于向量场 X, Y, Z 在 p 点的值 X_p, Y_p, Z_p. 因此每对向量 X_p, $Y_p\in T_p(M)$确定一个线性变换 $R(X_p, Y_p):T_p(M)\to T_p(M)$. 此外, $(R(X,Y,Z,W))_p$仅依赖于各向量场在 p 点的值, 且黎曼曲率张量仅依赖于 M 上的度量张量.

证明 设 $e_1, \cdots, e_m$ 为局部标架场

$$X=X^ie_i,\ Y=Y^ie_i,\ Z=Z^ie_i,\ W=W^ie_i,$$

由(3.1.19′)，$(X, Y, Z)\mapsto R(X, Y)Z$ 是三重线性的，故

$$R(X, Y)Z = X^iY^jZ^kR(e_i, e_j)e_k.$$

因为在给定点 $p\in M$，$(R(e_i, e_j)e_k)_p$ 与向量场无关，而 X^i, Y^j, Z^k 仅在 p 点取值，所以 $(R(X, Y)Z)_p$ 仅依赖于向量场 X, Y, Z 在 p 点的值 X_p, Y_p, Z_p. 据此，$(R(X, Y, Z, W))_p$ 也仅依赖于 X、Y、Z、W 在 p 点的值. 最后，由(3.2.4)，(3.1.31)以及黎曼内积即知，黎曼曲率张量仅取决于 M 上度量张量 g. ∎

在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中，存在正交坐标系 $x^1, \cdots, x^m$，使得

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij}.$$

于是易见 $\boldsymbol{R}^m$ 的(黎曼)曲率张量为零张量.

定义 3.3.1 曲率张量为零张量的黎曼流形 (M, g) 称为**平坦黎曼流形**，其度量称为**平坦度量**.

定理 3.3.4 在平坦黎曼流形 (M, g) 的各点都存在坐标图 (U, φ, x^i)，使得

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij}.$$

证明 在含任何点 p 的坐标图 (U, φ, x^i) 里，考虑Pfaff方程组

$$d\tilde{x}^i = \tilde{x}^i_j dx^j,$$

$$d\tilde{x}^i_j = \tilde{x}^i_k \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix} dx^l, \quad \begin{Bmatrix} k \\ jl \end{Bmatrix} \text{为克氏符号}.$$

外微分后，归结为

$$\tilde{x}^i_h R^h{}_{jkl} = 0.$$

由于平坦黎曼流形的曲率张量为零张量. 故上式为恒等式. 由Frobinous 定理，上述 Pfaff 方程组是完全可积的. 即对任意的初始值

$$x^i = x^i(p) \text{时} \tilde{x}^i = a^i, \ \tilde{x}^i_j = b^i_j \quad \det(b^i_j) \neq 0.$$

Pfaff 方程组的解 $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$ 在 p 的邻域 $U_1 \subset U$ 中唯一存在且

$\det\left(\dfrac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right)\neq 0$，故 $\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^m$ 也为含 p 的局部坐标系. 根据黎曼联络系数的变换公式(3.1.32)，

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\left\{\begin{matrix}k\\jl\end{matrix}\right\}=\frac{\partial \tilde{x}^h}{\partial x^j}\,\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}\left\{\begin{matrix}i\\hk\end{matrix}\right\}+\frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial x^j\partial x^l},$$

即得
$$\left\{\begin{matrix}\tilde{i}\\jk\end{matrix}\right\}=0.$$

于是 $\dfrac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{x}^k}=0$，故在 U_1 上 $\tilde{g}_{ij}$ 为常数.

由于$(\tilde{g}_{ij})$是正定对称矩阵，由线性代数知识，通过线性变换，可使$(\tilde{g}_{ij})$化为 $m\times m$ 单位矩阵. 因此在 U_1 上再对$\{\tilde{x}^i\}$实施线性变换，便可得到定理中所述的坐标系. ▌

设(M, g)和$(\tilde{M}, \tilde{g})$均为m黎曼流形，ϕ: $M\to\tilde{M}$ 是微分同胚. 若 $\phi^*\tilde{g}=g$，则称 ϕ 为**等距同胚**，称(M, g)和$(\tilde{M}, \tilde{g})$**相互等距**.

设微分同胚 $\phi: M\to\tilde{M}$ 在局部坐标系下表示成

$$\tilde{x}^i=\tilde{x}^i(x),$$

则 ϕ 为等距同胚的充要条件是

$$g_{ij}=\tilde{g}_{kl}\,\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j},$$

故由定理 3.3.4 立即下面推论.

推论 平坦黎曼流形局部等距于欧氏空间.

例 1 圆柱面 $S^1\times \boldsymbol{R}^1$ 是半径为 1 的圆周 S^1 和直线 $\boldsymbol{R}^1$ 的直积(见图)，对于圆柱上的点 $p(x, y, z)$，

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=z$, $0\leqslant\theta<2\pi$.

故在 $0<\theta<2\pi$ 的范围内取(θ, z)为其局部坐标系，于是 $\boldsymbol{R}^3$ 在此圆柱面上的诱导度量 $ds^2=d\theta^2+dz^2$. 因此，圆柱面为平坦黎曼流形. 由此例可见，平坦黎曼

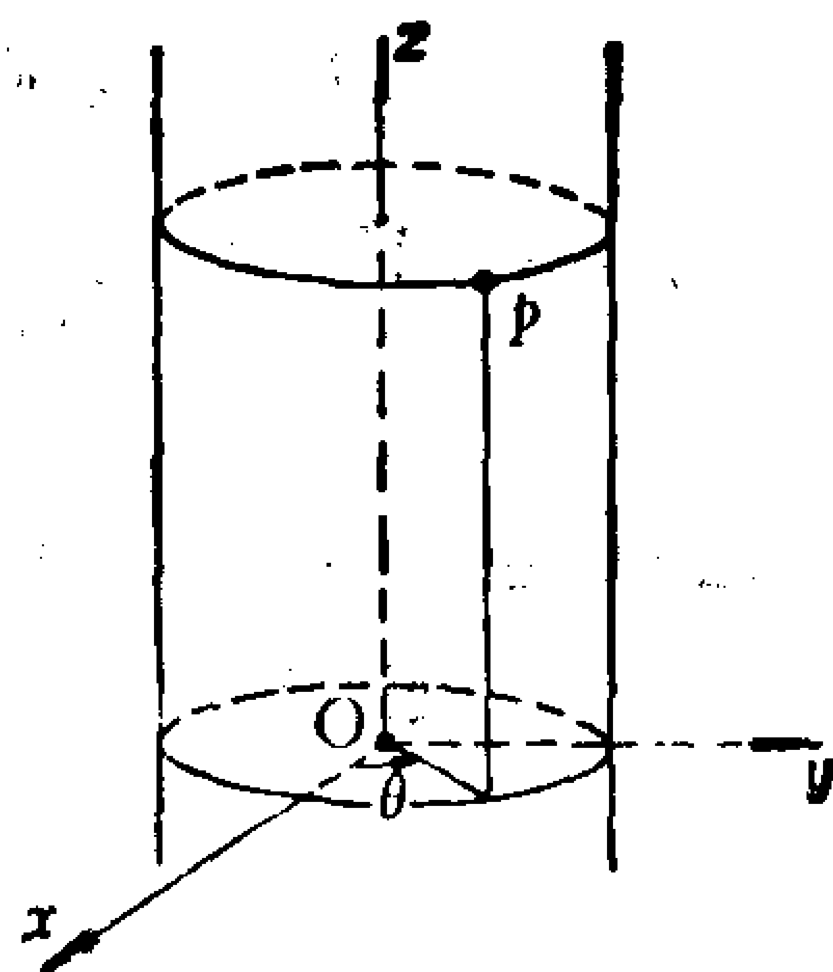


图 10

流形未必是整体的欧氏空间.

例 2 m 维环面:

$$T^m=\{(\theta_1, \cdots, \theta_m)\,|\,\theta_i\in S^1_{(i)},\ i=1, \cdots, m\}$$
$$=S^1_{(1)}\times\cdots\times S^1_{(m)},$$

这里 $S^1_{(i)}$ 均为半径为 1 的圆周. θ_i 为圆心角. 定义 T^m 的度量为直积度量

$$ds^2=\sum_i(d\theta_i)^2,$$

则 T^m 是平坦的. 注意, 这样的二维(平)环面 T^2 不能等距浸入 $\boldsymbol{R}^3$ 中, 但可浸入 $\boldsymbol{R}^4$ 中. 因此, 这种平环面不同于通常的 $\boldsymbol{R}^3$ 中的圆环面.

3.2 截面曲率 Ricci 曲率 纯量曲率

设 (M, g) 为黎曼流形, X, Y 是 $T_p(M)$ 中二个线性无关的向量, 它们张成 $T_p(M)$ 中的一个二维子空间 E, $E\subset T_p(M)$ 称为在 p 点由 X 和 Y 张成的平截面. 设 X', Y' 是 E 中另外二个线性无关的向量:

$$X'=aX+bY,\ Y'=cX+dY,\ \delta=ad-bc\neq 0,$$

则由于曲率张量 R 是四重线性的以及命题 3.3.1,

$$R(X', Y', X', Y')=\delta^2R(X, Y, X, Y).$$

再定义一个 $(0, 4)$ 型张量

$$G(X, Y, Z, W)\overset{\text{def}}{=\!=}\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle-\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle, \tag{3.3.11}$$

易见 G 也具有性质(3.3.3), 特别

$$G(X', Y', X', Y')=\delta^2G(X, Y, X, Y)$$
$$=\delta^2(\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X, Y\rangle^2).$$

因此, $R(X, Y, X, Y)/G(X, Y, X, Y)$ 仅与 $E\subset T_p(M)$ 有关,

而与 X, Y 在 E 中的选取无关.

定义 3.3.2 设 $E\subset T_p(M)$是一个平截面, X、Y 为 E 中任意二个线性无关的向量,则

$$K_p(E)=\frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)} \tag{3.3.12}$$

称为黎曼流形(M, g)在 p 点关于平截面 E 的截面曲率, 简称截曲率.

特别,如果 X, Y 为单位向量并且相互正交,则上式简化为

$$K_p(E)=R(X, Y, X, Y).$$

在局部坐标系下,设

$$X=X^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,\ Y=Y^i\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

则有

$$K_p(E)=\frac{R_{ijkl}(p)X^iY^jX^kY^l}{(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{lk})_pX^iY^jX^kY^l}. \tag{3.3.13}$$

定理 3.3.5 若 $\dim M=2$, 则截面曲率即为 M 的 Gauss 曲率; 若 $\dim M\geqslant 3$, 则 M 在 p 点的曲线张量由其在 p 点的所有(平截面)的截面曲率唯一确定.

证明 定理的第一部分就是经典微分几何中著名的 Gauss 定理. 可根据(3.3.13)直接验证.

现证定理的第二部分. 由定义 3.3.2, 我们只要证明: 若有另一满足(3.3.3)的(0, 4)型张量 $\tilde{R}(X, Y, Z, W)$, 并且对任何线性无关的 X, $Y\in T_p(M)$都有

$$\tilde{R}(X, Y, X, Y)=R(X, Y, X, Y),$$

则对于任意的 X, Y, Z, $W\in T_p(M)$, 有

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W)=R(X, Y, Z, W).$$

为此,置

$$S(X, Y, Z, W)=\tilde{R}(X, Y, Z, W)-R(X, Y, Z, W),$$

上述论述等价于证明：如果对于任意的 $X, Y\in T_p(M)$,

$$S(X, Y, X, Y)=0, \tag{3.3.14}$$

则 $S\equiv 0$. 显见，S 也为 (0, 4) 型张量且满足 (3.3.3) 中 (ii)—(iv)。将 $S(X+Z, Y, X+Z, Y)=0$ 展开，由于 (3.3.14) 得

$$S(X, Y, Z, Y)=0, \quad \forall X, Y, Z\in T_p(M). \tag{3.3.15}$$

再将 $S(X, Y+W, Z, Y+W)=0$ 展开，由 (3.3.15) 得

$$S(X, Y, Z, W)+S(X, W, Z, Y)=0,$$
$$\forall X, Y, Z, W\in T_p(M).$$

由 (3.3.3) (ii)′，又有

$$S(X, Y, Z, W)+S(X, Z, W, Y)$$
$$+S(X, W, Y, Z)=0,$$

即得

$$2S(X, Y, Z, W)=S(X, Z, Y, W).$$

相仿，又有

$$2S(X, Z, Y, W)=S(X, Y, Z, W).$$

于是对任意的 $X, Y, Z, W\in T_p(M)$

$$S(X, Y, Z, W)=0. \blacksquare$$

注：若置 $K(X, Y)=K(Y, X)=R(X, Y, X, Y)$

$$=K_p(E)(\|X\|^2\|Y\|^2-\langle X, Y\rangle^2)_p.$$

可验证

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{1}{6}\{K(X+Z, Y+W)-K(Y+Z,$$
$$X+W)-K(X, Y+W)-K(Z, Y+W)-K(X+Z,$$
$$Y)-K(X+Z, W)+K(Y, X+W)+K(Z, X+W)$$
$$+K(Y+Z, W)+K(X, W)+K(Z, Y)$$

$-K(Y, W)-K(Z, X)\}.$

由此定理也同样得证.

定义 3.3.3 设(M, g)为黎曼流形，若M在p点的截面曲率$K_p(E)$为定值，即与平截面$E\subset T_p(M)$的位置无关，则称M在p点是迷向的，p点称为M的迷向点. 如果M的所有点都是迷向点，则称M为迷向流形. 特别，当M的截面曲率恒为常数时，即$K_p(E)$既与E无关，也与点p无关，则称M为常曲率黎曼流形.

命题 3.3.6 $p\in M$为(M, g)的迷向点的充要条件是在p点有

$$R_{ijkl}(p)=K_p(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}), \tag{3.3.16}$$

其中

$$g_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle, \ R_{ijkl}=R(e_i, e_j, e_k, e_l),$$

$\{e_i\}$为任一局部标架场.

证明 若p是M的迷向点时，对任意的$X, Y\in T_p(M)$均有

$$\begin{aligned}R(X, Y, Z, W)&=K_pG(X, Y, Z, W)\\&=K_p\{\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\\&\quad-\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle\},\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

从而即得(3.3.16). 充分性是明显的. ▌

注：p点是M的迷向点的充要条件也可以表成

$$\Omega_{ij}(p)=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega^k\wedge\omega^l=-K_p\theta_i\wedge\theta_j, \tag{3.3.18}$$

其中 $$\theta_i=g_{ij}\omega^j,$$

而$\omega^1, \cdots, \omega^m$是$e_1, \cdots, e_m$的对偶标架场.

常曲率黎曼流形显然是迷向流形. 反之，我们有

定理 3.3.7(F. Schur) 设M是连通的迷向黎曼流形，且$\dim M\geqslant 3$，则M是常曲率黎曼流形.

证明 设$\{e_i\}$为 M 的局部规范正交标架场. 因 M 是迷向流形,故由命题 3.3.6, 对任何 $p\in M$

$$R_{ijkl}(p)=K(p)(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}). \qquad (3.3.19)$$

设$\{\omega_i\}$是$\{e_i\}$的对偶标架场. 由上式, M 的结构方程为

$$d\omega_i=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_k,\quad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,$$

$$d\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+K\omega_i\wedge\omega_j.$$

外微分最后一式, 利用结构方程, 它归结为

$$dK\wedge\omega_i\wedge\omega_j=0.$$

由于
$$dK=\sum_l K_l\omega_l,$$

且$\{\omega_l\wedge\omega_i\wedge\omega_j,\ 1\leqslant l<i<j\leqslant m\}$是 $A^3(M)$的基, 故若 $m\geqslant3$, 则得

$$K_l=0\quad (l=1,\ \cdots,\ m).$$

从而局部地 $K=$常数. 又因 M 是连通的. 故 K 在整个 M 上为常数, 即 M 是常曲率黎曼流形. ∎

完备连通的常曲率黎曼流形称为空间形式. 具有相同常数截面曲率 $K=c$ 的单连通的空间形式是彼此等距的(参考[4]).

1. $c=0$, 可置 $M^m=\boldsymbol{R}^m$, 具有通常的欧氏度量;

2. $c>0$, 可置 $M^m=S^m\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$为 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中半径为 $\frac{1}{\sqrt{c}}$ 的球面, 具有诱导的度量(参见本章§2.1 的例子).

3. $c<0$, 可置

$$M^m=\left\{x\in\boldsymbol{R}^m\,\middle|\,\sum_i(x^i)^2<-\frac{4}{c}\right\},$$

它为 $\boldsymbol{R}^m$ 中开集, 其度量由下式给定:

$$ds^2=\frac{\sum_i(dx^i)^2}{\left(1+\frac{c}{4}\sum_i(x^i)^2\right)^2}.$$

现在回到曲率张量, 由(3.3.1), 对任何 $X,\ Y\in\mathscr{X}(M)$, 映射

$Z\mapsto R(Z,\ X)Y$ 确定了 $\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$ 的一个线性变换. 特别,在某点 $p\in M$, 它定义一个 $T_p(M)\to T_p(M)$ 的线性变换. 这个线性变换的迹(关于度量 g)可表达为

$$S(X,\ Y)=g^{ij}\langle R(e_i,\ X)Y,\ e_j\rangle, \tag{3.3.20}$$

其中$\{e_i\}$是任一局部标架,

$$g_{ij}=\langle e_i,\ e_j\rangle,\ (g^{ij})=(g_{ij})^{-1}.$$

显然, S 是一个(0, 2)型张量场.

根据(3.3.2)和(3.3.3)我们有

$$\begin{aligned} S(X,\ Y)&=g^{ij}R(Y,\ e_j,\ X,\ e_i)\\ &=g^{ij}R(X,\ e_i,\ Y,\ e_j)=S(Y,\ X), \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

因此 S 是$(M,\ g)$的(0, 2)型对称张量场.

定义 3.3.4 由(3.3.20)定义的二阶对称共变张量场 S 称为$(M,\ g)$的 Ricci 张量场, 对于 $p\in M$ 和单位向量 $X_p\in T_p(M)$,

$$\mathrm{Ric}(X_p)\overset{\text{def}}{=\!=}S(X_p,\ X_p)$$

称为在 p 点沿 X_p 方向的 Ricci 曲率. 如果对所有的 $p\in M$, $\mathrm{Ric}(X_p)$与 X_p 无关, 而仅是 p 的函数, 即 $S=\lambda g$, 则称$(M,\ g)$为**爱因斯坦(Einstein)流形.**

在自然标架下, 设

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则从(3.3.20)得

$$S(X,\ Y)=R^l{}_{jli}X^jY^i=R_{ji}X^jY^i,$$

其中

$$R_{ij}\overset{\text{def}}{=\!=}R^l{}_{ilj}=g^{lk}R_{kilj} \tag{3.3.22}$$

就是 S 在自然标架下的分量, 因此

$$S=R_{ij}dx^i\otimes dx^j. \tag{3.3.23}$$

特别，当我们选取局部正交规范标架场$\{e_i\}$时，就有

$$S(X, Y)=\sum_i\langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle=\sum_i R(e_i, Y, e_i, X).$$

(3.3.24)

因此

$$S=R_{ij}\omega^i\otimes\omega^j, \qquad (3.3.24')$$

其中$\{\omega^i\}$是$\{e_i\}$的对偶标架场，且

$$R_{ij}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\sum_k R_{kikj},$$

在这种情况下，沿 e_i 的 Ricci 曲率为

$$\text{Ric}(e_i)=R_{ii}=\sum_k R_{kiki}=\sum_{k(\neq i)} R_{kiki}. \qquad (3.3.25)$$

根据(3.3.12)和(3.2.6)，R_{kiki} 表示由 e_k 和 e_i 所张成的平截面的截面曲率，因此(3.3.25)表明：Ricci 曲率是截面曲率的平均。

由 Ricci 张量，我们可以在每点 $p\in M$ 诱导一个线性映射 $R^*:T_p(M)\to T_p(M)$，它称为 Ricci 变换，定义如下：对于 $X_p\in T_p(M)$，象 $R^*(X_p)\in T_p(M)$ 由下式给定

$$\langle R^*(X_p), Y_p\rangle=S(X_p, Y_p), \ \forall Y_p\in T_p(M).$$

其实，由(3.3.20)易知

$$R^*(X_p)=g^{ij}(p)S(X_p, e_i)e_j.$$

定义 3.3.5 Ricci 变换的迹 $\rho\stackrel{\text{(def.)}}{=\!=}\operatorname{tr}R^*$ 称为(M, g)的纯量曲率或数量曲率.

显然，ρ 与标架的选取无关，它是 M 上的函数，在一般标架场下

$$\begin{aligned}\rho&=g^{ij}g^{kl}\langle R(e_k, e_i)e_j, e_l\rangle=g^{ij}S(e_i, e_j)\\&=g^{ij}g^{kl}R(e_k, e_i, e_l, e_j)=g^{ij}g^{kl}R_{kilj}.\end{aligned} \qquad (3.3.26)$$

特别，在正交规范标架场$\{e_i\}$下，

$$\rho=\sum_i R_{ii}=\sum_{i,j} R_{jiji}. \qquad (3.3.27)$$

因此，纯量曲率是 Ricci 曲率的平均．有时也用 $R=\sum_i R_{ii}$ 代表 ρ．

设(M, g)是爱因斯坦流形，则 $S=\lambda g$，于是

$$\rho=\lambda g^{ij}g(e_i, e_j)=m\lambda, \quad \lambda=\frac{\rho}{m},$$

即

$$S=\frac{\rho}{m}g. \tag{3.3.28}$$

另一方面，利用 Bianchi 第二恒等式(3.3.10)，从(3.3.28)易得

$$\frac{m-2}{m}\rho_{,k}=0.$$

因此当 $m\geqslant 3$ 时，$\rho=$const.，这就证得

命题 3.3.8 若(M, g)为爱因斯坦流形，$m=\dim M\geqslant 3$，则 M 的 Ricci 张量

$$S=\frac{\rho}{m}g,$$

且纯量曲率 $\rho=$常数．

显然，常曲率流形是爱因斯坦流形．但若(M, g)为连通的爱因斯坦流形且 $\dim M=3$，则(M, g)为常曲率黎曼流形(参考本节的习题 6 和 7)．

3.3 共形变换

设(M, g)是 m 维黎曼流形，$\varphi\in C^\infty(M)$是 M 上正函数，于是

$$\tilde{g}=\varphi^2 g \tag{3.3.29}$$

在 M 上定义了一个新的黎曼度量 $\tilde{g}$，它保持向量间的夹角不变．(3.3.29)称为黎曼度量的共形变换．特别，当 $\varphi=$const. 时，它称为相似变换．

用 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 分别表示关于 g 和 $\tilde{g}$ 的黎曼联络. 对应的克氏符号分别用 $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ 和 $\left\{ {\tilde{i} \atop jk} \right\}$ 表示, 那么, 对于任何 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, 有

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_Y X = \omega(X) Y + \omega(Y) X - \langle X, Y \rangle_g V,$$
$$\forall X, Y \in \mathscr{X}(M), \tag{3.3.30}$$

其中

$$\langle X, Y \rangle_g = g(X, Y), \ \omega \xlongequal{(\mathrm{def.})} d(\log \varphi),$$

V 是 ω 的对偶向量, 即

$$\langle V, X \rangle_g = \omega(X), \ \forall X \in \mathscr{X}(M).$$

在局部坐标系 $\{x^i\}$ 下, (3.3.30) 成为

$$\left\{ {\tilde{i} \atop jk} \right\} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j - \varphi^i g_{jk}, \tag{3.3.30$'$}$$

其中

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \ \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_g, \ (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1},$$

$$\varphi_i = (\log \varphi)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \log \varphi, \ \varphi^i = g^{ij} \varphi_j.$$

置

$$\phi(X, Y) \xlongequal{\mathrm{def}} (\nabla_X \omega)(Y) - \omega(X) \omega(Y)$$
$$+ \frac{1}{2} \omega(V) \langle X, Y \rangle_g, \quad X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

$$\langle \phi^*(X), Y \rangle \xlongequal{\mathrm{def}} \phi(X, Y),$$

于是

$$\tilde{R}(X, Y) Z = R(X, Y) Z - \phi(Y, Z) X + \phi(X, Z) Y$$
$$- \langle Y, Z \rangle_g \phi^*(X) + \langle X, Z \rangle_g \phi^*(Y), \tag{3.3.31}$$

其中 R 和 $\tilde{R}$ 分别表示 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 的曲率张量. 因此, 相应的 Ricci 张量 S 和 $\tilde{S}$ 有关系式

$$\tilde{S}(X, Y) = S(X, Y) - (m-2) \phi(X, Y)$$

$$-(\operatorname{tr}\phi)\langle X, Y\rangle_g. \tag{3.3.32}$$

这些公式在局部坐标系下成为

$$\tilde{R}^l{}_{ijk}=R^l{}_{ijk}+\varphi_{ij}\delta^l_k-\varphi_{ik}\delta^l_j+g_{ij}\varphi^l_k-g_{ik}\varphi^l_j, \tag{3.3.31'}$$

$$\tilde{R}_{ij}=R_{ij}-(m-2)\varphi_{ij}-\varphi^k_k g_{ij}, \tag{3.3.32'}$$

其中

$$\varphi_{ij}=\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\varphi_{i,j}-\varphi_i\varphi_j+\frac{1}{2}g_{ij}\varphi_k\varphi^k,$$

$$\varphi^l_j=g^{li}\varphi_{ij}.$$

因此，关于 g 和 $\tilde{g}$ 的纯量曲率 ρ 和 $\tilde{\rho}$ 有关系式

$$\varphi^2\tilde{\rho}=\rho-2(m-1)\operatorname{tr}\phi, \tag{3.3.33}$$

其中 $\operatorname{tr}\phi=g^{ij}\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\varphi^k_k.$

当 $m\geqslant 3$ 时，若令

$$L(X, Y)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{m-2}S(X, Y)$$

$$-\frac{\rho}{2(m-1)(m-2)}\langle X, Y\rangle_g,$$

$$\langle L^*(X), Y\rangle\overset{\text{def}}{=\!=}L(X, Y),$$

则不难验证

$$\tilde{L}=L-\phi,$$

$$\varphi\tilde{L}^*(X)=L^*(X)-\phi^*(X),$$

或在局部坐标系 $\{x^i\}$ 下，

$$\tilde{L}_{ij}=L_{ij}-\varphi_{ij},\quad \varphi^2\tilde{L}^i_j=L^i_j-\varphi^i_j,$$

其中

$$L_{ij}=\frac{1}{m-2}R_{ij}-\frac{\rho}{2(m-1)(m-2)}g_{ij},$$

$$L^i_j=g^{ik}L_{kj}.$$

将这些表达式代入(3.3.31)消去 ϕ，则得

$$\tilde{C}=C, \tag{3.3.34}$$

其中张量 C 由下式定义

$$C(X, Y)Z=R(X, Y)Z+L(Y, Z)X-L(X, Z)Y$$
$$+\langle Y, Z\rangle_g L^*(X)-\langle X, Z\rangle_g L^*(Y), \tag{3.3.35}$$

它称为关于度量 g 的 Weyl 共形曲率张量；$\tilde{C}$ 是关于 $\tilde{g}$ 的共形曲率张量.

在局部坐标系下，(3.3.34) 和 (3.3.35) 分别为

$$\tilde{C}^l{}_{ijk}=C^l{}_{ijk}, \tag{3.3.34'}$$

其中

$$C^l{}_{ijk}=R^l{}_{ijk}+\delta^l{}_k L_{ij}-\delta^l{}_j L_{ik}+g_{ij}L^l{}_k-g_{ik}L^l{}_j. \tag{3.3.35'}$$

这样，我们就证明了

命题 3.3.9 在黎曼度量的共形变换下，Weyl 共形曲率张量是不变的；此外，当 $m=3$ 时，这个张量为零张量.

下面，我们定义三阶共变张量场 D 如下，

$$D(X, Y, Z)\overset{\text{def}}{=\!=}(m-2)\{\nabla_Z L(X, Y)-\nabla_Y L(X, Z)\}, \tag{3.3.36}$$

显然，它关于 Y 和 Z 是反称的. 可以直接验证

$$\tilde{D}(X, Y, Z)=D(X, Y, Z)-\omega(C(Z, Y)X). \tag{3.3.37}$$

在局部坐标系下，就有

$$D_{ijk}=(m-2)\{L_{ij,k}-L_{ik,j}\} \tag{3.3.36'}$$

$$\tilde{D}_{ijk}=D_{ijk}-\varphi_l C^l{}_{ijk}. \tag{3.3.37'}$$

对 (3.3.35′) 两边共变微分，利用第二 Bianchi 恒等式和 (3.3.36′) 得

$$C^l{}_{ijk,h}+C^l{}_{ikh,j}+C^l{}_{ihj,k}=\frac{1}{m-2}\{\delta^l{}_k D_{ijh}-\delta^l{}_j D_{ikh}+\delta^l{}_h D_{ikj}$$

$$+g_{ij}D^l{}_{kh}-g_{ik}D^l{}_{jh}-g_{ih}D^l{}_{kj}\},$$

上式关于 l 和 h 缩并，利用 $C^l{}_{ilj}=0$ 和 $D^l{}_{lj}=g^{il}D_{ilj}=0$，便得

$$C^l{}_{ijk,l}=\frac{m-3}{m-2}D_{ikj}. \tag{3.3.38}$$

由(3.3.37)和(3.3.38)，结合命题 3.3.9，便得下述

命题 3.3.10 若 $\dim M=m=3$，则由(3.3.36)定义的张量 D 在度量的共形变换下是不变的，若 $m>3$ 且 $C\equiv0$，则 $D\equiv0$.

定义 3.3.6 设(M,g)是 m 维黎曼流形，若对于每点 $p\in M$，都存在一个包含 p 的开邻域 U 及 U 上的平坦黎曼度量 $\tilde{g}$(即关于它的曲率张量 $\tilde{R}\equiv0$)，使得在 U 上 g 和 $\tilde{g}$ 是共形的，则称(M,g)为局部共形平坦的黎曼流形.

显然，欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的曲面都是共形平坦的，对于 $m\geqslant3$ 的情况我们有

定理 3.3.11 $m(\geqslant3)$维黎曼流形(M,g)为局部共形平坦的充要条件是：

(i) 当 $m>3$ 时，$C\equiv0$；

(ii) 当 $m=3$ 时，$D\equiv0$.

证明 设(M,g)是局部共形平坦的，由定义 3.3.6 在任何 U 上，$\tilde{R}=0$ 从而 $\tilde{S}=0$，$\tilde{\rho}=0$，于是根据命题 3.3.9 和 3.3.10，得

$$C=\tilde{C}=0,\quad D=\tilde{D}=0,$$

这就证明了必要性．现证充分性，考虑偏微分方程组

$$\begin{cases}(\log\varphi)_{,i}=\varphi_i,\\ \varphi_{i,j}=\varphi_i\varphi_j-\dfrac{1}{2}g_{ij}\varphi^k\varphi_k+L_{ij},\end{cases} \tag{3.3.39}$$

其中 $$L_{ij}=\frac{1}{m-2}R_{ij}-\frac{\rho}{2(m-1)(m-2)}g_{ij},$$

$$\varphi^k=g^{ki}\varphi_i.$$

第一组方程的可积性条件由于第二组方程而自然满足．第二组方

程的可积性条件是(参考(3.2.38′))

$$\varphi_{i,jk}-\varphi_{i,kj}=\varphi_l R^l{}_{ijk}.$$

通过直接计算，上式等价于

$$\varphi_l C^l{}_{ijk}=\frac{1}{m-2}D_{ijk}. \qquad (3.3.40)$$

当 $m>3$ 时，由命题 3.3.10，若 $C=0$，则 $D=0$，从而(3.3.40)恒满足，当 $m=3$ 时，由命题 3.3.9，此时 $C=0$，因此若 $D=0$，则(3.3.40)也为恒等式. 所以，在定理的条件下，方程组(3.3.39)完全可积. 这样，(3.3.39)式有一个局部正解 φ，用它作共形变换(3.3.29)，则不难验证

$$\tilde{L}_{ij}=0$$

再由(3.3.35′)的类似式得

$$\tilde{R}^l{}_{ijk}=\tilde{C}^l{}_{ijk}=C^l{}_{ijk}=0.$$

最后的等号是已知条件，这就证明了$(M,\ g)$是局部共形平坦的. ∎

推论 常曲率黎曼流形必是共形平坦的. $m(\geqslant 3)$ 维共形平坦的爱因斯坦流形是常曲率黎曼流形.

1960 年 Yamabe 提出猜想：在每个 $m(\geqslant 3)$维紧致光滑黎曼流形$(M,\ g)$上，存在一个光滑正函数 φ，使得共形度量 $\tilde{g}=\varphi^2 g$ 具有常数纯量曲率. 这归结为寻找方程(3.3.33)的整体正解. 1970 年，T. Aubin 对此作出了很大贡献. 1984 年，这个猜测已被 R. Schoen 完全解决. (见J.Diff.Geom.,20(1984, 479—495.)

习　题

1. 证明(3.3.3)(iii)式:

$$R(X,\ Y,\ Z,\ W)=-R(Y,\ X,\ Z,\ W)=-R(X,\ Y,\ W,\ Z).$$

2. 证明:

$$\nabla_X(R(Y,\ Z)W)+\nabla_Y(R(Z,\ X)W)+\nabla_Z(R(X,\ Y)W)$$
$$=R(X,\ Y)\nabla_Z W+R(Y,\ Z)\nabla_X W+R(Z,\ X)\nabla_Y W$$

$$+R([X, Y], Z)W+R([Y, Z], X)W+R([Z, X], Y)W.$$

3. 在自然标架下,直接证明第二 Bianchi 恒等式(3.3.10):

$$R_{ijkl,h}+R_{ijlh,k}+R_{ijhk,l}=0.$$

4. 证明:

$$R(X, Y, Z, W)=\frac{1}{6}\{K(X+Z, Y+W)-K(Y+Z, X+W)$$
$$-K(X, Y+W)-K(Z, Y+W)-K(X+Z, Y)-K(X+Z, W)$$
$$+K(Y, X+W)+K(Z, X+W)+K(Y+Z, W)+K(X, W)$$
$$+K(Z, Y)-K(Y, W)-K(Z, X)\},$$

式中 $K(X, Y)=R(X, Y, X, Y)$.

5. 设黎曼流形(M^m, g)的黎曼曲率张量 R 满足下式

$$R(X, Y, Z, W)=\frac{1}{m-1}\{S(Y, Z)g(X, W)-S(Y, W)g(X, Z)\},$$

式中 S 为 Ricci 张量,且 $m\geqslant 3$,则(M^m, g)为常曲率流形.

6. 设(M^3, g)是三维黎曼流形. 在任一点 $p\in M^3$,取坐标系$\{x^i\}$使得在 p 点有 $g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=0$, $i\neq j$. 证明:对于 $i, j, k\neq$,在 p 点成立

$$R_{ij}=\frac{1}{g_{kk}}R_{ikjk},$$
$$R_{ii}=\frac{1}{g_{jj}}R_{ijij}+\frac{1}{g_{kk}}R_{ikik},$$
$$R_{ijij}-g_{ii}R_{jj}-g_{jj}R_{ii}+\frac{1}{2}\rho g_{ii}g_{jj}=0,$$

其中 ρ 是 M^3 的纯量曲率,即 $\rho=g^{ij}R_{ij}$.

7. 设(M^m, g)为连通的 Einstein 流形,$m\geqslant 3$,

(i) 若 $m=3$,则(M^m, g)为常曲率黎曼流形,

(ii) 若(M^m, g)的数量曲率 $\rho\neq 0$,则(M^m, g)上不存在平行向量场.

8. 设 $M^2\subset \boldsymbol{R}^3$ 为浸入曲面,且具有由 $\boldsymbol{R}^3$ 的欧氏度量所诱导的黎曼度量,证明:M^2 上的截面曲率即为 Gauss 曲率.

9. 计算球面 $S^m(r)=\{x\in \boldsymbol{R}^{m+1}|\sum\limits_i(x^i)^2=r^2(常数)\}$的截面曲率,Ricci 曲率和数量曲率. $S^m(r)$上的黎曼度量是由 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 的欧氏度量所诱导的.

10. 从球面 $S^2(a)=\{x\in \boldsymbol{R}^3|\sum\limits_i(x^i)^2=a^2\}$去掉点$(0, 0, \pm a)$得到黎曼流形 M,在 M 与直线 L 的直积空间 $M\times L$ 上引入黎曼度量

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2+\left(dt-\frac{tx^3(x^1dx^2-x^2dx^1)}{a((x^1)^2+(x^2)^2)}\right)^2,$$

在 M 上取球坐标$(\theta,\ \varphi)$，则黎曼度量成为

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)+(dt-K\cos\theta\, d\varphi)^2,\quad K=\text{const.},$$

(i) 证明：对应于球面绕原点的任何旋转，在 $M\times L$ 中有局部等距映射；

(ii) 证明：关于对偶空间的基向量 $\omega^1=ad\theta,\ \omega^2=a\sin\theta\, d\varphi,\ \omega^3=dt-K\cos\theta\, d\varphi$，黎曼联络 1-形式为

$$\omega_1^2=-\omega_2^1=\frac{K}{2a^2}(dt-K\cos\theta\, d\varphi)+\cos\theta\, d\varphi,$$

$$\omega_1^3=-\omega_3^1=\frac{K}{2a}\sin\theta d\varphi,\ \omega_2^3=-\omega_3^2=-\frac{K}{2a}d\theta;$$

(iii) 什么条件下，$M\times L$ 是常曲率黎曼流形.

11. 设$(M,\ g)$和$(M,\ \tilde{g})$均为黎曼流形，$\tilde{g}=\varphi^2g$. $\{\omega^i\}$为 M 上局部余向量标架场，$\omega^j{}_i$ 和 $\tilde{\omega}^j{}_i$ 分别为对应的黎曼联络 1-形式. 证明：

$$\tilde{\omega}^i{}_j=\omega^i{}_j+\delta^i{}_jd\log\varphi+\varphi_j\omega^i-\varphi_i\omega^j.$$

其中 φ_i 由下式定义

$$\varphi_i\omega^i=d\log\varphi.$$

12. 证明(3.3.30)式.

13. 证明(3.3.31)和(3.3.32)或(3.3.31′)和(3.3.32′).

14. 证明 $m=3$ 时$(M^m,\ g)$的 Weyl 共形曲率张量为零张量.

15. 设 $S^m(r)=\{x\in \mathbf{R}^{m+1}\,|\sum_i(x^i)^2=r^2,\ r>0\}$. 作球极投影

$$\phi:\ S^m(r)-\{(0,\ \cdots,\ 0,\ r)\}\longrightarrow \mathbf{R}^m.$$

证明：ϕ 为共形映射，即对于黎曼流形$(S^m(r),\ \tilde{g})$和$(\mathbf{R}^m,\ g)$有 $\tilde{g}=\phi^*g$；这里 $\tilde{g}$ 是 $S^m(r)\subset\mathbf{R}^{m+1}$ 的诱导度量，g 为 $\mathbf{R}^m$ 上的欧氏度量.

16. 任何 2 维黎曼流形都是爱因斯坦的，它的纯量曲率未必为常数.

§4 调 和 形 式

4.1 Hodge 星算子

设$(M,\ g)$是 m 维定向黎曼流形，其黎曼度量为 g. 考虑 M 上任一坐标图$(U,\ \varphi,\ x^i)$，我们有

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \tag{3.4.1}$$

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

以下若无特殊说明，本节中指标取值范围总是 1, …, m.

M 的体积元 η 可表示成（见第二章 § 4）

$$\eta = \sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m, \quad G = \det(g_{ij}). \tag{3.4.2}$$

为了便于计算，我们引入 Kronecker 符号

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \det\begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_1}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_r} \\ \delta^{i_2}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_2}_{j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta^{i_r}_{j_1} & \delta^{i_r}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{pmatrix} \quad (1 \leqslant r \leqslant m). \tag{3.4.3}$$

当 $r=1$ 时，这就是通常的 Kronecker delta δ^i_j. 由定义式(3.4.3)直接看出，Kronecker 符号具有以下性质：

(i) $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 关于指标$(i_1, \cdots, i_r)$或$(j_1, \cdots, j_r)$是反对称的

(ii) 若 $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, 则 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \delta^{i_1}_{j_1} \cdots \delta^{i_r}_{j_r}$;

(iii) $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{cases} 0, \text{若}(j_1, \cdots, j_r)\text{不是}(i_1, \cdots, i_r)\text{的置换}, \\ 1, \text{若}(j_1, \cdots, j_r)\text{是}(i_1, \cdots, i_r)\text{的偶置换}, \\ -1, \text{若}(j_1, \cdots, j_r)\text{是}(i_1, \cdots, i_r)\text{的奇置换}, \end{cases}$

体积元 η 作为 M 的 m 次形式，可写成

$$\eta = \sum_{i<} \eta_{i_1\cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$$

$$= \frac{1}{m!} \eta_{i_1\cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}, \tag{3.4.4}$$

其中 $\sum\limits_{i<} = \sum\limits_{i_1 < \cdots < i_m}$ 表示指标按大小顺序排列后求和，且

$$\eta_{i_1\cdots i_m} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sqrt{G}\, \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}. \tag{3.4.5}$$

显然，$d\eta = 0$. 利用(3.2.23), (3.2.27)和(3.2.32)，便得

$$\eta_{i_1\cdots i_m, k} = 0. \tag{3.4.6}$$

用 $A^r(M)$ 表示 M 上 r 次形式构成的向量空间(见第二章 § 3),我们定义 Hodge 星算子 $*: A^r(M)\to A^{m-r}(M)$ 如下:

定义 3.4.1 设 $\alpha\in A^r(M)$, $0\leqslant r\leqslant m$, 局部可表示为

$$\alpha=\sum_{i<}\alpha_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\alpha_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}, \qquad (3.4.7)$$

定义 $^*\alpha\in A^{m-r}(M)$ 是

$$^*\alpha=\sum_{j<}{}^*\alpha_{j_{r+1}\cdots j_m}dx^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}, \qquad (3.4.8)$$

其中

$$^*\alpha_{j_{r+1}\cdots j_m}=\sum_{i<}\eta_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\alpha^{i_1\cdots i_r}, \qquad (3.4.9)$$

$$\alpha^{i_1\cdots i_r}=g^{i_1k_1}\cdots g^{i_rk_r}\alpha_{k_1\cdots k_r}, \qquad (g^{ij})=(g_{ij})^{-1}.$$

$^*\alpha$ 称为 α 的伴随形式.

设 $\beta\in A^r(M)$,

$$\beta=\sum_{i<}\beta_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}. \qquad (3.4.10)$$

定义 3.4.2 r 次形式 α 和 β 的局部内积 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 定义为

$$\langle\alpha, \beta\rangle\xlongequal{(\text{def.})}\sum_{i<}\alpha^{i_1\cdots i_r}\beta_{i_1\cdots i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\alpha^{i_1\cdots i_r}\beta_{i_1\cdots i_r}. \qquad (3.4.11)$$

以上我们均已设 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$(或 $\beta_{i_1\cdots i_r}$)关于 $i_1, \cdots, i_r$ 是反对称的.

为了简化计算, 有时取局部正交规范标架场$\{e_i\}$及其对偶标架场$\{\omega^i\}$,这样

$$g_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle=\delta^i{}_j, \qquad g^{ij}=\delta^i{}_j, \qquad \sqrt{G}=1.$$

如果设

$$\alpha=\sum_{i<}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}, \qquad (3.4.7')$$

则由定义 3.4.1, 类似地有

$$^*\alpha=\sum_{j<}{}^*\tilde{\alpha}_{j_{r+1}\cdots j_m}\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge d\omega^{j_m} \tag{3.4.8'}$$

其中
$$^*\tilde{\alpha}_{j_{r+1}\cdots j_m}=\sum_{i<}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\tilde{\alpha}^{i_1\cdots i_r}$$

$$=\frac{1}{r!}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\tilde{\alpha}^{i_1\cdots i_r}. \tag{3.4.9'}$$

于是，在正交规范标架场下，体积元可写成

$$\eta=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m={}^*1. \tag{3.4.12}$$

根据定义 3.4.1 和 3.4.2 不难证明下述的命题.

命题 3.4.1 设 $\alpha,\ \beta\in A^r(M),\ f\in C^\infty(M)$，则有

(i) $^*(\alpha+\beta)={}^*\alpha+{}^*\beta,\quad {}^*(f\alpha)=f({}^*\alpha)$,

(ii) $^{**}\alpha={}^*({}^*\alpha)=(-1)^{r(m-r)}\alpha$;

(iii) $\alpha\wedge{}^*\beta=\beta\wedge{}^*\alpha=\langle\alpha,\ \beta\rangle\eta$.

证明 (i)和(ii)是简单的，我们只证(iii). 取局部正交规范标架场. 设 $\alpha,\ \beta$ 均由(3.4.7′)型式子给出，利用(3.4.8′)和(3.4.9′)可得

$$\alpha\wedge{}^*\beta=\Big(\sum_{i<}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\Big)\wedge\Big(\sum_{j,k<}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m}\tilde{\beta}_{k_1\cdots k_r}$$
$$\cdot\,\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_m}\Big)=\sum_{i,j,k<}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\tilde{\beta}_{k_1\cdots k_r}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m}$$
$$\cdot\,\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\wedge\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_m}.$$

最后和式中的非零项具有如下特征：数组$(i_1,\ \cdots,\ i_r)$和$(k_1,\ \cdots,\ k_r)$只相差一个置换. 由于它们都按大小顺序排列，故

$$(i_1,\ \cdots,\ i_r)=(k_1,\ \cdots,\ k_r).$$

这样，

$$\alpha\wedge{}^*\beta=\sum_{i,j<}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r}\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\wedge\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_m}$$
$$=\Big(\sum_{i<}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r}\Big)\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m,$$

这里第二个等号是因为对于前面和式中的非零项，数组$(i_1,\ \cdots,\ i_r,\ j_{r+1},\ \cdots,\ j_m)$必是$(1,\ \cdots,\ m)$的一个置换. 既然$(i_1,\ \cdots,\ i_r)$和

$(j_{r+1}, \cdots, j_m)$都按大小顺序排列. 则当$(i_1, \cdots, i_r)$固定时, $(j_{r+1}, \cdots, j_m)$也随之完全确定; 换言之, 前面的和式实际上只对指标 $i_1, \cdots, i_r$ 求和, 再根据 Kronecker 符号的性质, 显然有

$$\delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}\wedge\omega^{j_{r+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_m}=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m$$

(上下指标不求和; $i_1<\cdots<i_r,\ j_{r+1}<\cdots<j_m$).

因此, 再由定义 3.4.2 便得

$$\alpha\wedge{}^*\beta=\langle\alpha,\ \beta\rangle\eta.$$

完全类似地可证

$$\beta\wedge{}^*\alpha=\langle\beta,\ \alpha\rangle\eta=\langle\alpha,\ \beta\rangle\eta.\ ▌$$

推论 $\alpha\wedge{}^*\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$.

现在给出 Stokes 定理的散度形式. 为此, 设 M 具有(逐段)光滑边界 ∂M, 考虑某个 $\alpha\in A^1(M)$, 它的局部表示为

$$\alpha=\alpha_i dx^i,$$

根据定义 3.4.1, 我们有

$${}^*\alpha=\frac{1}{(m-1)!}\ \alpha^i\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m},$$

其中 $\qquad\alpha^i=g^{ij}\alpha_j,\qquad \eta_{ij_2\cdots j_m}=\sqrt{G}\,\delta^{1\cdots m}_{ij_2\cdots j_m}.$

对 $m-1$ 次形式 ${}^*\alpha$ 外微分, 得

$$\begin{aligned}d({}^*\alpha)&=\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{\partial}{\partial x^k}(\alpha^i\eta_{ij_2\cdots j_m})dx^k\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\\&=\frac{1}{(m-1)!}(\alpha^i\eta_{ij_2\cdots j_m})_{,k}dx^k\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\\&=\frac{1}{(m-1)!}(\alpha^i{}_{,k})\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^k\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\\&=\sum_{j<}(\alpha^i{}_{,k})\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^k\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}.\end{aligned}$$

上面计算中, 第二个等号是利用(3.2.28), 由于外积运算满足反交换律, 而第二类克氏符号$\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}$关于 j 和 k 是对称的, 故得该等式.

等三个等号是根据(3.4.6).

考察最后和式中非零的项. 显然，这些项的指标数组$(k, j_2, \cdots, j_m)$应是$(1, \cdots, m)$的一个置换；当$(j_2, \cdots, j_m)$固定时，k就唯一地被确定了. 另一方面，由(3.4.5)，当$(j_2, \cdots, j_m)$固定时，$\eta_{ij_2\cdots j_m}$的指标i也被唯一确定(为了使$\eta_{ij_2\cdots j_m}\neq 0$)，因此，必有$i=k$，这样，再根据(3.4.4)我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j<}(\alpha^i{}_{,k})\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^k\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\\
&=\sum_{j<}\sum_i(\alpha^i{}_{,i})\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^i\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\\
&=\sum_i\{(\alpha^i{}_{,i})\sum_{j<}\eta_{ij_2\cdots j_m}dx^i\wedge dx^{j_2}\wedge\cdots\wedge dx^{j_m}\}\\
&=\sum_i(\alpha^i{}_{,i})\eta.
\end{aligned}$$

所以

$$d({}^*\alpha)=(\operatorname{div}\alpha)\eta, \tag{3.4.13}$$

式中$\operatorname{div}\alpha=\alpha^i{}_{,i}$称为$\alpha$的散度.

对(3.4.13)两边积分，由 Stokes 定理 2.4.3 便得下述定理.

定理 3.4.2 设(M, g)是具有光滑边界∂M(可以是空集)的定向紧致黎曼流形，$\alpha\in A^1(M)$，则

$$\int_M(\operatorname{div}\alpha)\eta=\int_{\partial\tilde{M}}{}^*\alpha \tag{3.4.14}$$

这就是 Stokes 公式的散度形式.

若把 1-形式看成共变向量场，则借助度量g，可得到对偶的反变向量场. 反之，从一个反变向量场可得到对偶的 1-形式，因此，定理 3.4.2 常运用于(反变)向量场. 设$x\in\mathscr{X}(M)$，局部表示为

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则其对偶 1-形式为

$$X^b=(X^jg_{ji})dx^i,$$

于是(3.4.14)可写成

$$\int_M (\operatorname{div} X)\eta = \int_{\partial M} {}^*(X^\flat), \qquad (3.4.14')$$

其中 $\operatorname{div} X = X^i{}_{,i}$ 是 X 的散度，上式的 Green 表示见第五章 §2.1.

推论 在定理 3.4.2 的假设下，若 $\partial M = \varnothing$，或 $\alpha|_{\partial M} = 0$，则有

$$\int_M (\operatorname{div} \alpha)\eta = 0. \qquad (3.4.15)$$

若 M 是非紧致的完备流形，则只要 α 具有紧致支集．公式 (3.4.15) 同样成立．此外，在一般文献中，常把体积元 η 写成 dV 或 ^{*1}；在不引起混淆时，也有省略 η 者．

4.2 Laplace-Beltrami 算子

利用 Hodge 星算子和外微分算子(见第二章 §3)，我们可以定义余微分(Codifferential)算子 $\delta: A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 方法如下：

$$A^r(M) \xrightarrow{*} A^{m-r}(M) \xrightarrow{d} A^{m-r+1}(M) \xrightarrow{*} A^{r-1}(M)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(-1)^{m(r+1)+1}\delta}$$

定义 3.4.3 余微分算子 $\delta: A^r(M) \to A^{r-1}(M)$ 定义为

$$\begin{cases} \delta f = 0, \ \forall f \in A^0(M), \\ \delta\alpha = (-1)^{m(r+1)+1} * d * \alpha, \ \forall \alpha \in A^r(M), \ 1 \leqslant r \leqslant m. \end{cases} \qquad (3.4.16)$$

满足 $\delta\alpha = 0$ 的 $r(\geqslant 1)$ 次微分形式 α 称为余闭的(co-closed)；若存在 $\beta \in A^{r+1}(M)$，使得 $\alpha = \delta\beta$，则 α 称为余恰当的(co-exact)．

根据上述定义，不难直接验证下面的命题．

命题 3.4.3 余微分算子 δ 具有如下性质：

(i) $\delta^2 = \delta \cdot \delta = 0$，

(ii) $^*\delta d = d\delta^*$，　$^*d\delta = \delta d^*$，

(iii) $d * \delta = \delta * d = 0$，

(iv) $^*\delta\alpha=(-1)^r d*\alpha,\quad \forall\alpha\in A^r(M),\quad 1\leqslant r\leqslant m,$

(v) $\delta*\alpha=(-1)^{1-r}*d\alpha,\quad \forall\alpha\in A^r(M).$

证明从略.

为了给出余微分算子 δ 的另一解释，我们引入微分形式的整体内积概念.

定义 3.4.4 设 M 是紧致定向的黎曼流形，$\alpha,\ \beta\in A^r(M)$，那末，α 与 β 的整体内积 $(\alpha,\ \beta)$ 定义为

$$(\alpha,\ \beta)=\int_M\alpha\wedge{}^*\beta=\int_M\langle\alpha,\ \beta\rangle\eta, \qquad (3.4.17)$$

其中 η 是 M 的体积元，$\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 是由(3.4.11)给定的局部内积.

由定义 3.4.2, 命题 3.4.1 及其推论，易知

$$(\alpha,\ \beta)=(\beta,\ \alpha),$$

$$(\alpha,\ \alpha)\geqslant 0,$$

并且后一式中等号成立当且仅当 $\alpha=0$.

现在可以看到，关于整体内积，算子 δ 和 d 是互为共轭的，这就是下述定理.

定理 3.4.4 设 M 是紧致无边界的定向黎曼流形，$\alpha\in A^r(M)$，$\beta\in A^{r+1}(M)$，则

$$(d\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ \delta\beta). \qquad (3.4.18)$$

证明 首先，我们有

$$d(\alpha\wedge{}^*\beta)=d\alpha\wedge{}^*\beta+(-1)^r\alpha\wedge d^*\beta,$$

然后两边积分，应用 Stokes 定理，得

$$(d\alpha,\ \beta)=(-1)^{r+1}\int_M\alpha\wedge d^*\beta.$$

再根据命题 3.4.3 的性质(iv)，由于 $\beta\in A^{r+1}(M)$，故有

$$(-1)^{r+1}d*\beta={}^*\delta\beta,$$

因此，$$(d\alpha,\ \beta)=\int_M\alpha\wedge{}^*\delta\beta=(\alpha,\ \delta\beta).\ \blacksquare$$

推论 若 $\alpha\in A^1(M)$，则

$$\int_M (\delta\alpha)\eta = 0.$$

定理 3.4.4 为我们提供了计算余微分的另一途径.

命题3.4.5 设 $\alpha\in A^r(M)$ 在自然基下由(3.4.7)给出，则有

$$\delta\alpha = -\sum_{i<}(g^{jk}\alpha_{ji_2\cdots i_{r-1},k})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}}$$

$$=\frac{-1}{(r-1)!}(g^{jk}\alpha_{ji_2\cdots i_{r-1},k})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}},$$

(3.4.19)

其中 $\alpha_{ji_2\cdots i_{r-1},k}$ 由(3.2.28)定义.

证明 设 $\beta\in A^{r-1}(M)$ 是 M 上具有紧致支集的任一个 $(r-1)$ 次微分形式，它的局部表达式为

$$\beta=\frac{1}{(r-1)!}\beta_{i_1\cdots i_{r-1}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}},$$

于是
$$d\beta=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\partial\beta_{i_1\cdots i_{r-1}}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}}$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\beta_{i_1\cdots i_{r-1},j}\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}}. \quad (3.4.20)$$

因为 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ 关于指标是反对称的，则由(3.4.9)确定的 $\alpha^{i_1\cdots i_r}$ 关于指标也是反对称的. 因此，由(3.4.20)得

$$\langle d\beta,\ \alpha\rangle=\frac{1}{(r-1)!}\beta_{i_1\cdots i_{r-1},j}\alpha^{ji_1\cdots i_{r-1}}.$$

另一方面，若记

$$\sigma=\frac{-1}{(r-1)!}g^{jk}\alpha_{ji_1\cdots i_{r-1},k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{r-1}},$$

则
$$\langle\beta,\ \sigma\rangle=\frac{-1}{(r-1)!}g^{jk}\alpha_{ji_1\cdots i_{r-1},k}\beta^{i_1\cdots i_{r-1}}$$

$$=\frac{-1}{(r-1)!}\alpha^{ji_1\cdots i_{r-1}}{}_{,j}\beta_{i_1\cdots i_{r-1}},$$

因此，
$$\langle d\beta,\ \alpha\rangle-\langle\beta,\ \sigma\rangle=\frac{1}{(r-1)!}(\alpha^{ji_1\cdots i_{r-1}}\beta_{i_1\cdots i_{r-1}})_{,j}$$

$$=\operatorname{div}\theta,$$

其中 $\theta=\frac{1}{(r-1)!}(\alpha_{ji_1\cdots i_{r-1}}\beta^{i_1\cdots i_{r-1}})dx^j\in A^1(M)$.

对上式两边积分，根据定理 3.4.2 的推论，我们有

$$\int_M\langle d\beta,\ \alpha\rangle\eta=\int_M\langle\beta,\ \sigma\rangle\eta,$$

即$(d\beta,\ \alpha)=(\beta,\ \sigma)$. 再根据定理 3.4.4, 得

$$(\beta,\ \delta\alpha)=(\beta,\ \sigma).$$

由于β的任意性，便得 $\delta\alpha=\sigma$.

上述命题也可用不变形式来表达，即

推论 设 $\alpha\in A^r(M)$，则对于任意的$X_1,\ \cdots,\ X_{r-1}\in\mathscr{X}(M)$，有

$$\delta\alpha(X_1,\ \cdots,\ X_{r-1})=-\sum_i(\nabla_{e_i}\alpha)(e_i,\ X_1,\ \cdots,\ X_{r-1}),\tag{3.4.21}$$

其中$\{e_i\}$是 M 上的局部正交规范标架场.

利用外微分算子和余微分算子，就可给出微分流形上的一个十分重要的微分算子——Laplace-Beltrami 算子.

定义 3.4.5 线性映射

$$\Delta\overset{(\text{def.})}{=\!=\!=}-\delta d-d\delta:A^r(M)\to A^r(M),\quad 0\leqslant r\leqslant m\tag{3.4.22}$$

称为黎曼流形$(M,\ g)$上的 Laplace-Beltrami 算子，或简称 Laplacian. 满足 $\Delta\alpha=0$ 的微分形式α称为调和形式. 特别地，满足$\Delta f=0$的函数$f\in A^0(M)$称为调和函数.

注：对于$f\in A^0(M)$，有 $\delta f=0$，故 $\Delta f=-\delta df$.

从定义可直接验证

命题 3.4.6 对于算子 Δ，有

(i) $\Delta=-(d+\delta)^2$,

(ii) $d\circ\Delta=\Delta\circ d=-d\circ\delta\circ d$,

(iii) $\delta\circ\Delta=\Delta\circ\delta=-\delta\circ d\circ\delta$,

(iv) $^*\Delta=\Delta^*$.

证明

$$d\circ\Delta=-(dd\delta+d\delta d)=-d\delta d=-(d\delta d+\delta dd)=\Delta\circ d,$$

$$\delta\circ\Delta=-(\delta d\delta+\delta\delta d)=-\delta d\delta=-\delta d\delta-d\delta\delta=\Delta\circ\delta,$$

$$^*\Delta=-(^*d\delta+{}^*\delta d)=-(\delta d^*+d\delta *)=\Delta^*. \blacksquare$$

定理 3.4.7 设(M, g)是紧致无边界的定向黎曼流形，$\alpha\in A^r(M)$，则α是调和形式的充要条件为α既是闭的又是余闭的. 换言之，

$$\Delta\alpha=0\Leftrightarrow d\alpha=0,\qquad \delta\alpha=0.$$

证明 由定理 3.4.4 和(3.4.22)，有

$$\begin{aligned}-(\Delta\alpha,\ \alpha)&=(d\delta\alpha+\delta d\alpha,\ \alpha)\\&=(\delta\alpha,\ \delta\alpha)+(d\alpha,\ d\alpha),\end{aligned}$$

因为$(d\alpha,\ d\alpha)\geqslant 0$，$(\delta\alpha,\ \delta\alpha)\geqslant 0$，故当$\Delta\alpha=0$时，必须$d\alpha=\delta\alpha=0$. 其逆是显然的. ▌

推论 设(M, g)是紧致无边界的定向黎曼流形，$\alpha, \beta\in A^r(M)$，$0\leqslant r\leqslant m$，则

$$(\Delta\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ \Delta\beta), \tag{3.4.22'}$$

换言之，算子Δ是自共轭的.

由于定理 3.4.7 及其推论，故Δ是一个正定(椭圆型)的自共轭算子.

为了说明(3.4.22)与通常的 Laplace 算子的关系，我们有

命题 3.4.8 对于$f\in A^0(M)$，有

$$\begin{aligned}\Delta f&=g^{ij}f_{,ij}\\&=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{G}\ g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right),\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

其中 $\qquad G=\det(g_{ij}), \quad (g^{ij})=(g_{ij})^{-1}.$

证明 第一个等式是 $\Delta f=-\delta df$ 的直接结果. 第二个等号可通过共变导数的张量计算直接验证(见本章§2), 下面给出另一简单证明.

考虑任一点 $p\in M$ 和包含 p 点的一个坐标图 (U,φ,x^i), 在 U 上任取可微函数 $h:U\to\mathbf{R}$, 使

$$D\overset{\text{def}}{=\!=}\operatorname{supp}(h)\subset U.$$

根据定理 3.4.4, 我们有

$$\begin{aligned}\int_D(h\Delta f)\eta&=-\int_D\langle dh,df\rangle\eta\\&=\int_D-\left(g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\sqrt{G}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.\end{aligned}\tag{3.4.24}$$

另一方面, 由于 U 与 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 微分同胚, 故 $f\circ\varphi^{-1}$ 和 $h\circ\varphi^{-1}$ 都是 $\varphi(U)$ 上的可微函数, 且

$$\operatorname{supp}(h\circ\varphi^{-1})=\varphi(D)\subset\varphi(U).$$

为简单起见, 这些函数仍记为 f 和 h, 这样,

$$\begin{aligned}&-\int_D\left(g^{ij}\frac{\partial h}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\sqrt{G}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&=-\int_{\varphi(D)}\left(\frac{\partial h}{\partial x^i}g^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&=\int_{\varphi(D)}-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(hg^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m\\&\quad+\int_{\varphi(D)}h\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.\end{aligned}\tag{3.4.25}$$

当 $\varphi(U)$ 看成欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的子集时, $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$ 是它的体积元(关于欧氏度量), $-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(hg^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中具有紧致

支集的下述向量场 X 的散度 $\operatorname{div} X$，这里

$$X=-\left(hg^{ij}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

由定理 3.4.3 的推论，可见(3.4.25)的最后等式右侧第一式为零，而后一式等于

$$\int_{\varphi(D)}h\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\right]\sqrt{G}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m$$

$$=\int_D h\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\right]\eta.$$

因此，从(3.4.24)得

$$\int_D(h\Delta f)\eta=\int_D h\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\right]\eta.$$

由于 h 的任意性和点 $p\in M$ 的任意性，便得(3.4.23)中最后的等式.

由(3.4.23)可见，对于欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的欧氏度量，

$$\Delta=\sum_i\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.$$

但是，也有不少文献中把(3.4.22)改为

$$\Delta=d\delta+\delta d,$$

这就与通常的 Laplace 算子差一符号. 这是初学者要注意的.

(3.4.23)的另一种表达形式是

推论 对于 $f\in A^0(M)$，有

$$\Delta f=\sum_i\nabla^2 f(e_i,e_i)=\operatorname{tr}\nabla^2 f=\operatorname{tr}\nabla df,\qquad(3.4.26)$$

其中 $\operatorname{tr}\nabla^2$ 称为迹 Laplace，$\{e_i\}$是任一正交规范标架场.

对于一般的 $r(\geqslant 1)$ 次微分形式，我们有

定理 3.4.9(Weitzenböck 公式) 设 $\alpha\in A^r(M)$，$r\geqslant 1$，$\{e_i\}$ 是 M 上一个局部正交规范标架场. 则对于 $X_1,\cdots,X_r\in\mathscr{X}(M)$，成立

$$(\Delta\alpha)(X_1, \cdots, X_r) = (\mathrm{tr}\nabla^2\alpha)(X_1, \cdots, X_r)$$
$$-\sum_{t=1}^{r}(-1)^t\sum_{i=1}^{m}(R(e_i, {}_tX_t)\alpha)(e_i, X_1, \cdots, \hat{X}_t, \cdots, X_r), \tag{3.4.27}$$

其中 $R(e_i, X_t)\alpha$ 由(3.2.37)给定, $\hat{X}_t$ 表示取消 X_t.

这个定理的证明用下一章提到的法坐标系最简便, 此处从略. 我们只对 $r=1$ 的特殊情况给出证明, 即

推论 设 $\alpha\in A^1(M)$, X 是 α 的对偶向量场, 则对于任意的 $Y\in\mathscr{X}(M)$, 有

$$\Delta\alpha(Y) = \mathrm{tr}\,\nabla^2\alpha(Y) - S(X, Y), \tag{3.4.28}$$

其中 S 是 (M, g) 的 Ricci 张量场.

证明 在自然标架下, 设 $\alpha=\alpha_i dx^i$, 则其对偶向量场 X 为

$$X = \alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha^i = g^{ij}\alpha_j.$$

根据定义 3.4.5, 利用(3.4.9)和 Ricci 恒等式(3.2.38′), 不难得到

$$\begin{aligned}
-\Delta\alpha &= d\delta\alpha + \delta d\alpha \\
&= -\alpha^j{}_{,ij}dx^i + (g^{jk}\alpha_{j,ik} - g^{jk}\alpha_{i,jk})dx^i \\
&= -g^{jk}\alpha_{i,jk}dx^i + (\alpha^j{}_{,ji} - \alpha^j{}_{,ij})dx^i \\
&= -g^{jk}\alpha_{i,jk}dx^i + \alpha^k R^j{}_{kji}dx^i \\
&= -g^{jk}\alpha_{i,jk}dx^i + R_{ji}\alpha^j dx^i.
\end{aligned}$$

这就是(3.4.28)在自然标架场下的表达式. ∎

4.3 Hodge 定理及其几何应用

设 (M, g) 是紧致无边界的定向黎曼流形, 且 $\dim M=m$. 已给 $\sigma\in A^r(M)$, 是否存在 $\omega\in A^r(M)$, 使得 $-\Delta\omega=\sigma$? 换言之, 方程 $-\Delta\omega=\sigma$ 有解的充要条件是什么? Hodge 定理解答了这个问题. 令

$$H^r(M)=\{\alpha\in A^r(M)\mid\Delta\alpha=0\}=\ker\Delta, \qquad (3.4.29)$$

若存在 $\omega\in A^r(M)$ 使 $-\Delta\omega=\sigma$，则对于任何 $\alpha\in H^r(M)$，有

$$-(\sigma,\ \alpha)=(\Delta\omega,\ \alpha)=(\omega,\ \Delta\alpha)=0,$$

即 σ 必须与 $H^r(M)$ 正交，记成 $\sigma\perp H^r(M)$. Hodge 定理指出，这个条件也是充分的. 为了叙述 Hodge 定理，我们再引入两个子空间 $dA^{r-1}(M)\subset A^r(M)$ 和 $\delta A^{r+1}(M)\subset A^r(M)$:

$$\begin{aligned} dA^{r-1}(M)&=\{d\alpha\mid\alpha\in A^{r-1}(M)\},\\ \delta A^{r+1}(M)&=\{\delta\alpha\mid\alpha\in A^{r+1}(M)\}. \end{aligned} \qquad (3.4.30)$$

定理 3.4.10 (Hodge 分解定理) 对于每个整数 $r(0\leqslant r\leqslant m)$，$H^r(M)$ 是有限维的，并且 $A^r(M)$ 有下述正交直和分解：

$$\begin{aligned} A^r(M)&=(-\Delta)A^r(M)\oplus H^r(M)\\ &=d\delta A^r(M)\oplus\delta dA^r(M)\oplus H^r(M)\\ &=dA^{r-1}(M)\oplus\delta A^{r+1}(M)\oplus H^r(M). \end{aligned} \qquad (3.4.31)$$

因此，方程 $-\Delta\omega=\sigma$ 有解 $\omega\in A^r(M)$ 的充要条件是 $\sigma\perp H^r(M)$.

这个定理的详细证明可参考[5]，现在我们利用分解式(3.4.31)给出 $-\Delta\omega=\sigma$ 有解的充分性证明.

设 $\sigma\perp H^r(M)$，则(3.4.31)表明，存在 $\alpha\in A^{r-1}(M)$ 和 $\beta\in A^{r+1}(M)$，使得

$$\sigma=d\alpha+\delta\beta.$$

现在只要证明：存在 $\mu,\ \nu\in A^r(M)$ 使

$$-\Delta\mu=d\alpha, \qquad -\Delta\nu=\delta\beta,$$

这时 $\omega=\mu+\nu$ 就是方程的解. 事实上，连续使用 Hodge 分解定理，我们有

$$\alpha=d\alpha_1+\delta\beta_1+\gamma_1, \qquad \gamma_1\in H^{r-1}(M),$$
$$\beta_1=d\alpha_2+\delta\beta_2+\gamma_2, \qquad \gamma_2\in H^r(M),$$

因此，$d\alpha=d\delta\beta_1$, $\delta\beta_1=\delta d\alpha_2$, 从而

$$d\alpha = d\delta d\alpha_2 = -\Delta d\alpha_2.$$

这样，$\mu = d\alpha_2$. 存在. 同理可证 ν 也存在.

调和形式的重要性在于它和 de Rham 上同调类(见第二章 § 3.2)的下述关系.

定理 3.4.11 设(M, g)是紧致定向的黎曼流形. 则每个上同调类都有唯一的调和表示. 换言之，不同的调和形式不可能属于同一个上同调类.

证明 令 $h: A^r(M) \to H^r(M)$ 是关于分解式(3.4.31)的投影映射. 若 $\omega \in A^r(M)$ 是闭的，则由(3.4.31)得

$$\omega = d\alpha + h(\omega), \quad \alpha \in A^{r-1}(M).$$

这表明 ω 与 $h(\omega) \in H^r(M)$ 是上同调的，即

$$[\omega] = [h(\omega)] \in H^r(M, \boldsymbol{R}),$$

其中 $H^r(M, \boldsymbol{R})$ 表示 M 上第 r 个 de Rham 上同调群(见第三章 § 3.2)，但因 $H^r(M) \perp dA^{r-1}(M)$，故不同的调和形式必属于不同的上同调类. 其实，若 γ_1, $\gamma_2 \in H^r(M)$ 且 $[\gamma_1] = [\gamma_2]$，则

$$\gamma_1 - \gamma_2 = d\alpha, \quad \alpha \in A^{r-1}(M),$$

由 Hodge 的正交分解定理，可见

$$d\alpha + (\gamma_2 - \gamma_1) = 0$$

意味着 $$d\alpha = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

因此，$h(\omega)$ 在 $H^r(M)$ 中是唯一的. ▌

由定理 3.4.11 可见，$H^r(M)$ 与 $H^r(M, \boldsymbol{R})$ 同构，即

$$H^r(M) \cong H^r(M, \boldsymbol{R}).$$

再由 Hodge 定理便得

推论 de Rham 上同调群 $H^r(M, \boldsymbol{R})$, $0 \leqslant r \leqslant m$, 都是有限维的.

由此，我们可给出下述定义.

定义 3.4.6 黎曼流形(M, g)的第 r 个 Bitti 数 $\beta_r(M)$ 定义

为

$$\beta_r(M)=\dim H^r(M, \boldsymbol{R})=\dim H^r(M), \qquad 0\leqslant r\leqslant m, \tag{3.4.32}$$

它们的代数和

$$\chi(M)=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\beta_r(M) \tag{3.4.33}$$

称为 M 的 Euler-poincaré 示性数.

以下设(M, g)是紧致无边界的m维定向黎曼流形,设

$$[\omega]\in H^r(M, \boldsymbol{R}), \qquad 其中\ \omega\in H^r(M),$$

$$[\theta]\in H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}), \qquad 其中\ \theta\in H^{m-r}(M).$$

那么,上同调类$[\omega]$中的一般元素可写为 $\omega+d\alpha$, $\alpha\in A^{r-1}(M)$,类似地, $[\theta]$中一般元素为 $\theta+d\beta$, $\beta\in A^{m-r-1}(M)$. 注意到 ω 和 θ 都是调和形式,应用定理 3.4.7 及 Stokes 定理,我们有

$$\begin{aligned}
&\int_M(\omega+d\alpha)\wedge(\theta+d\beta)\\
&=\int_M(\omega+d\alpha)\wedge\theta+\int_M(\omega+d\alpha)\wedge d\beta\\
&=\int_M\omega\wedge\theta+\int_M d(\alpha\wedge\theta)\\
&\quad-(-1)^r\int_M d((\omega+d\alpha)\wedge\beta)\\
&=\int_M\omega\wedge\theta,
\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

这就导致定义 r 次上同调类与 $m-r$ 次上同调类的 Poincaré 数积.

定义 3.4.7 设(M, g)是紧致无边界的 m 维定向黎曼流形. Poincaré 数积 P 是一个双线性映射

$$P: H^r(H, \boldsymbol{R})\times H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R},$$

它定义为

$$P([\omega],\ [\theta])=P(\omega,\ \theta)=\int_M \omega\wedge\theta, \qquad (3.4.35)$$

其中 $\omega\in H^r(M),\quad \theta\in H^{m-r}(M).$

命题 3.4.12 双线性映射(3.4.35)是非蜕化的.

证明 设 $[\omega]\in H^r(M, \boldsymbol{R})$ 且 $\omega\in H^r(M)$，所谓双线性映射(3.4.35)是非蜕化的，意即若$[\omega]$非零，则可确定一个非零的$[\theta)\in H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})$，使得 $P(\omega, \theta)\neq 0$. 事实上，因为$[\omega]$非零，故$\omega\in H^r(M)$不恒为零. 由命题 3.4.6 的性质(iv)，$\Delta{}^*\omega={}^*\Delta\omega=0$，即 ${}^*\omega\in H^{m-r}(M)$. 所以$[{}^*\omega]\in H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})$，于是

$$P(\omega, {}^*\omega)=\int_M\omega\wedge{}^*\omega=(\omega, \omega)\geqslant 0$$

而且$P(\omega, {}^*\omega)=0$ 当且仅当 $\omega=0$. ▮

定理 3.4.13 Poincaré 数积诱导了 $H^r(M,\boldsymbol{R})$与 $H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})$之间的一个同构，$0\leqslant r\leqslant m$.

证明 双线性映射(3.4.35)确定了一个线性映射

$$L: H^r(M, \boldsymbol{R})\to(H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}))^*,$$

它定义为：$\forall\omega\in H^r(M, \boldsymbol{R})$, $L\omega\in(H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}))^*$，成立

$$\int_M L\omega(\theta)\eta=P(\omega, \theta),\ \forall\theta\in H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}), \qquad (3.4.36)$$

其中$(H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}))^*$是 $H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})$的对偶空间，$\eta$ 为体积元.

根据命题 3.4.12，这样的 L 是一个同构，因此我们有

$$H^r(M, \boldsymbol{R})\cong(H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}))^*\cong H^{m-r}(M, \boldsymbol{R}). \ ▮$$

推论

$$\beta_r(M)=\dim H^r(M, \boldsymbol{R})=\dim H^{m-r}(M, \boldsymbol{R})$$
$$=\beta_{m-r}(M). \qquad (3.4.37)$$

命题 3.4.14 若 $\dim M=m$ 为奇数，则 $\chi(M)=0$.

证明 由(3.4.37)，定义式(3.4.33)中的项$(-1)^r\beta_r(M)$与$(-1)^{m-r}\beta_{m-r}(M)=(-1)^{-r+1}\beta_r(M)$成对抵消，即得证. ▮

命题 3.4.15 若(M, g)是紧致无边界的 m 维定向连通黎曼流形，则

$$H^m(M, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}.$$

证明 由定理 3.4.13 得

$$H^m(M, \boldsymbol{R}) \cong H^0(M, \boldsymbol{R}),$$

又由定理 3.4.11,

$$H^0(M, \boldsymbol{R}) \cong H^0(M),$$

后者表示 M 上调和函数的全体，由于(M, g)是紧致无边界的定向连通流形. 根据定理 3.4.7, (M, g)上的调和函数必为常数，即

$$H^0(M) \cong \boldsymbol{R}. \blacksquare$$

命题 3.4.16 设(M, g)是紧致无边界的定向黎曼流形，若 M 具有正 Ricci 曲率，则

$$\beta_1(M) = \beta_{m-1}(M) = 0. \qquad (3.4.38)$$

证明 设 $\alpha \in H^1(M)$, $X \in \mathscr{X}(M)$是 α 的对偶向量场. 由于 α 的调和性，利用(3.4.28)得

$$0 = -\Delta\alpha(X) = -\mathrm{tr}\nabla^2\alpha(X) + S(X, X),$$

两边积分，由定理 3.4.4 的推论，得

$$0 = -\int_M \mathrm{tr}\nabla^2\alpha(X) + \int_M S(X, X)$$

$$= \int_M |\nabla\alpha|^2 + \int_M S(X, X) \geqslant 0.$$

因此，

$$\nabla\alpha = 0, \quad S(X, X) = 0.$$

既然 $\mathrm{Ric}(M) > 0$, 故上述第二式表明 $X = 0$, 即 $\alpha = 0$. 由于 $\alpha \in H^1(M)$的任意性，故

$$\beta_1(M) = \dim H^1(M) = 0.$$

再用(3.4.37)

$$\beta_{m-1}(M) = 0.$$

习　　题

1. 证明命题 3.4.1.

2. 验证命题 3.4.3.

3. 证明: 若 $\alpha\in A^1(M)$, 则 $\int_M(\delta\alpha)\eta=0$.

4. 证明命题 3.4.6.

5. 设 $\alpha\in A^r(M)$, 对任意的 $X_1, \cdots, X_{r-1}\in\mathscr{X}(M)$, 证明:

$$(\delta\alpha)(X_1, \cdots, X_{r-1})=-\sum_i(\nabla_{e_i}\alpha)(e_i, X_1, \cdots, X_{r-1}),$$

其中$\{e_i\}$是局部规范正交标架.

6. 直接验证公式(3.4.23).

7. 设 M 是紧致无边的光滑黎曼流形, h, $f\in C^2(M)$. 证明下面的 Green 公式

$$\int_M(h\Delta f-f\Delta h)\eta=0.$$

8. 设$\{x^i\}$是欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的直角坐标系, 设

$$\alpha=\sum_{i<}\alpha_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r},$$

写出 $d\alpha$, $^*\alpha$, $\delta\alpha$ 及 $\Delta\alpha$ 的表达式.

9. 在(M, g)上取测地极坐标系:

$$g=(dr)^2+g_{ij}(r, \theta)d\theta^i d\theta^j,\quad 1\leqslant i, j, k\leqslant m-1.$$

设 $f=f(r)$ 与$\{\theta^i\}$无关, 证明

$$\Delta f=f''+\frac{m-1}{r}f'+f'\frac{\partial}{\partial r}\log\sqrt{G},$$

其中 $G=|\det(g_{ij})|$, "$'$"表示关于 r 的普通求导.

第四章 测 地 线

§1 测地线与测地完备性

1.1 测地线与指数映射 法坐标系

设(M, g)为 m 维黎曼流形，∇ 为 M 上黎曼联络，M 上的一条参数化曲线是一个光滑映射 $\gamma: I=(a, b)\to M$，M 上沿 γ 的向量场 V 是一个映射，它对每个 $t\in I$，指定一个切向量 $V_t\in T_{\gamma(t)}(M)$。如果对 M 上任何光滑函数 f，$t\to V_t f$ 都确定了 I 上的一个光滑函数，则称沿 γ 的向量场 V 是光滑的。因此，

$$\gamma'\equiv\frac{d\gamma}{dt}=\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)$$

所定义的曲线 γ 的切(速度)向量场是沿 γ 的向量场。上式中 $\frac{d}{dt}$ 表示一维流形 I 上的标准向量场。而 $\gamma_*: T_t(I)\to T_{\gamma(t)}(M)$是由 γ 诱导的切映射。

定义 4.1.1 如果沿 γ 的向量场 V 满足

$$\nabla_{\gamma'}V=0, \tag{4.1.1}$$

则称 V 是沿 γ 平行的。特别，若 γ 的切向量 γ' 沿 γ 是平行的，即

$$\nabla_{\gamma'}\gamma'=0, \tag{4.1.2}$$

则曲线 γ 为 M 上的测地线。

测地线的微分方程为(见(3.1.35))

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0. \tag{4.1.3}$$

设 γ 是测地线，则

$$\gamma'\langle\gamma', \gamma'\rangle=2\langle\nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma'\rangle=0.$$

故 γ 的切向量 γ' 的长度

$$\|\gamma'\| = \langle\gamma', \gamma'\rangle^{\frac{1}{2}} = \text{const.},$$

即沿 γ 为常数. 引入 γ 的弧长

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'\| dt,$$

则有

$$s(t) = \|\gamma'\| t + \text{const.}$$

这样,我们已证得

命题 4.1.1 测地线 $\gamma:(a, b)\to M, t\mapsto\gamma(t)$ 的参数 t 是 γ 的弧长 s 的线性函数. 而且, t 为弧长参数, 当且仅当 $\|\gamma'(t)\|=1$.

$\|\gamma'\|=1$ 的测地线称为**正规测地线**.

引理 1 对任一点 $p_0\in M$, 存在 p_0 的一个邻域 U 和一个正数 $\varepsilon>0$, 使得对于每个 $p\in U$ 和每个向量 $v\in T_p(M)$, $\|v\|<\varepsilon$, 存在唯一的一条测地线 $\gamma_v:(-2, 2)\to M$, 它满足条件

$$\gamma_v(0)=p, \quad \gamma_v'(0)=v.$$

证明 根据常微分方程理论, 存在 p_0 的一个邻域 U 和二个正数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$, 使得对于每个 $p\in U$ 和每个 $v\in T_p(M)$, $\|v\|<\varepsilon_1$, 都有唯一的一条测地线 $\tilde{\gamma}_v:(-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2)\to M$, 它满足所述的初始条件

$$\tilde{\gamma}_v(0)=p, \quad \tilde{\gamma}_v'(0)=v.$$

选取 $\varepsilon<\varepsilon_1\varepsilon_2$, 对于 $\|v\|<\varepsilon$ 定义

$$\gamma_v:(-2, 2)\to M, \quad t\mapsto\tilde{\gamma}_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t).$$

因为
$$\gamma_v'(t)=\varepsilon_2\tilde{\gamma}_{v/\varepsilon_2}'(\varepsilon_2 t),$$

故 γ_v 是测地线, 此外,

$$\gamma_v(0)=\tilde{\gamma}_{v/\varepsilon_2}(0)=p, \quad \gamma_v'(0)=\varepsilon_2\tilde{\gamma}_{v/\varepsilon_2}'(0)=v.$$

引理得证. ▮

现设 $v\in T_p(M)$ 且假定存在一条测地线 $\gamma:[0, 1]\to M$, 使得

$$\gamma(0)=p, \quad \gamma'(0)=v. \tag{4.1.4}$$

今用 $\exp_p(v)$ 来表示上述测地线 γ 上的点 $\gamma(1)$，即

$$\exp_p(v)=\gamma(1). \tag{4.1.5}$$

这样，就能确定 $T_p(M)$ 中原点的一个邻域 B 到 M 的一个映射

$$\exp_p: B(\subset T_p(M))\to M.$$

定义 4.1.2 由(4.1.5) 确定的映射 $\exp_p: B(\subset T_p(M))\to M$ 称为关于点 p 的**指数映射**.

其几何意义是沿 γ 由 p 到 $\gamma(1)=\exp_p(v)$ 的弧长等于 $\|v\|$. 而由引理 1 知道，若 $\|v\|$ 充分小，则 $\exp_p(v)$ 是确定的；当 $\|v\|$ 很大时，$\exp_p(v)$ 未必有意义. 不过，如果它是有意义的，则 $\exp_p(v)$ 总是唯一确定的.

命题 4.1.2 设 $p\in M$，且对 $v\in T_p(M)$，$\exp_p(v)$ 是有意义的. 则 $\exp_p(tv)$ 对于每个 t，$|t|<1$，是有定义的. 并且 $\gamma(t)=\exp_p tv$ 是测地线，它满足条件：

$$\gamma(0)=p, \quad \gamma'(0)=v.$$

证明 设 $\gamma(t)$ 为测地线使得

$$\gamma(0)=p, \quad \gamma'(0)=v, \quad \exp_p v=\gamma(1).$$

设 $\tilde{\gamma}(t)$ 为测地线，使

$$\tilde{\gamma}(0)=p, \quad \tilde{\gamma}'(0)=cv, \quad \exp_p cv=\tilde{\gamma}(1), \quad |c|<1.$$

易见
$$\frac{d}{dt}\gamma(ct)_{t=0}=cv, \quad \gamma(ct)|_{t=0}=p,$$

且 $\gamma(ct)$ 也为测地线，故由常微分方程的解的唯一性，得

$$\tilde{\gamma}(t)=\gamma(ct), \quad \exp_p cv=\tilde{\gamma}(1)=\gamma(c).$$

再以 t 代替 c 即有

$$\gamma(t)=\exp_p tv. \ ▮$$

使用局部坐标，设

$$p=(x_0^i), \quad V=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,$$

则满足(4.1.4)的测地线方程为

$$x^i = x_0^i + v\xi^i - \frac{1}{2} t^2 \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_{x_0} \xi^j \xi^k + \cdots. \tag{4.1.6}$$

设 TM 为 M 上切丛, (U, φ)为 M 的坐标图, $(x^1, \cdots, x^m)$为其局部坐标, 点 $p \in U$ 的切向量可表成 $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 从而$(x^1, \cdots, x^m; \xi^1, \cdots \xi^m)$为 $TU(\subset TM)$上的局部坐标. 据引理 1, 对于每一个 $q \in U$, 映射

$$(q, V) \mapsto \exp_q V$$

是在$(p, 0) \in TM$ 的一个邻域 $\mathscr{U}(\subset TM)$上有定义的, 且进而在$\mathscr{U}$上是可微的.

研究光滑映射 $F: \mathscr{U} \to M \times M$,

$$(q, V) \mapsto F(q, V) = (q, \exp_q V).$$

用$(y^1, \cdots, y^m; y^{m+1}, \cdots, y^{2m})$ 表示在 $U \times U(\subset M \times M)$ 上的诱导坐标, 则 F 的局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i = x^i, \\ y^{m+i} = x^i + \xi^i - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \xi^j \xi^k + \cdots, \end{cases} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

故我们有

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\delta_i^l - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\} \xi^j \xi^k + \cdots \right) \frac{\partial}{\partial y^{m+l}},$$

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right) = \left(\delta_i^l - \left\{ \begin{matrix} l \\ ki \end{matrix} \right\}_q \xi^k + \cdots \right) \frac{\partial}{\partial y^{m+l}},$$

因此, F 在$(p, 0)$处的 Jacobi 矩阵为 $\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, 是非奇异的. 由反函数定理, F 微分同胚地把$(p, 0) \in TM$ 的某个邻域 $\mathscr{U}'$ 映射到$(p, p) \in M \times M$ 的某个邻域上. 可设

$$\mathscr{U}' = \{(q, v) \in TM|_{q \in U' \subset U}, \quad v \in T_q(M) \|v\| < \varepsilon\},$$

再选取 p 的一个小邻域 W, 使得 $W \times W \subset F(\mathscr{U}')$, 于是我们有

定理 4.1.3 对每一点 $p\in M$，存在 p 的一个邻域 W 和正数 $\varepsilon>0$，使得

（i）W 内任何两点可用在 U 中长度小于 ε 的唯一的一条测地线相连接；

（ii）这条测地线光滑地依赖于这两个点，即若 $t\mapsto \exp_{q_1} tv$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 为连接 q_1 和 q_2 的测地线，则 $(q_1, v)\in TM$ 可微地依赖于 (q_1, q_2)；

（iii）对每个 $q\in W$，指数映射 $\exp_q$ 把 $T_q(M)$ 上的开 ε-球：$N_\varepsilon(q)=\{v\in T_q(M) \mid \|v\|<\varepsilon\}$ 微分同胚地映到 M 的一个开集 $U_q(\supset W)$ 上.

证明 考虑上述的邻域 W 和 $\mathscr{U}'$ 对应的 $\varepsilon>0$.

（i）对于任何两点 $q_1, q_2\in W$，由于 F 是微分同胚，故存在唯一的 $v\in T_{q_1}(M)$，$\|v\|<\varepsilon$，使 $F^{-1}(q_1, q_2)=(q_1, v)\in\mathscr{U}'$. 显然，$q_2=\exp_{q_1}v$. 因此 $\gamma_v(t)=\exp_{q_1}(tv)$ 就是所求之测地线.

（ii）注意到 $v=\exp_{q_1}^{-1}(q_2)$，上述测地线可改写为

$$\gamma_v(t)=\exp_{q_1}(t\exp_{q_1}^{-1}(q_2)), \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

于是，由常微分方程理论，便得(ii)的论断.

（iii）因为 $\exp_q$ 可看成映射 $F(q,\cdot)$（固定第一个变量），既然 F 是微分同胚，故 $\exp_q$ 亦然. ∎

更进一步，可以选取 W，使得连接 W 内任何两点的测地线全部位于 W 中. 这样的 W 称为点 p 的**测地凸邻域**.（参考[16]，p. 305）.

由上述定理的(iii)，对于一点 $q\in W$，指数映射 $\exp_q: N_\varepsilon\to U_q$ 为微分同胚. 我们取 $T_q(M)$ 的一个幺正基 $e_1, \cdots, e_m$；任何 $v\in T_q(M)$ 可表为 $v=y^ie_i$. 由此定义微分同胚 $\psi: T_q(M)\to \boldsymbol{R}^m$ 为 $v=y^ie_i\mapsto(y^1, \cdots, y^m)$，它把 $N_\varepsilon\subset T_q(M)$ 映为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个开 ε-球 $B_\varepsilon^m(0)$. 这样，复合映射 $\varphi=\psi\circ\exp_q^{-1}: U_q\to B_\varepsilon^m(0)\subset\boldsymbol{R}^m$ 就把点 q

的一个开邻域 U_q 微分同胚地映为 $B_\varepsilon^m(0)$，即

$$M\supset U_q \xrightarrow{\exp_q^{-1}} N_\varepsilon \xrightarrow{\psi} B_\varepsilon^m(0)\subset \boldsymbol{R}^m.$$

因此，$(U_q,\ \varphi)$成为 M 上的一个坐标图.

定义 4.1.2 $(U_q,\ \varphi;\ y^i)$，$\varphi=\psi\circ\exp_q^{-1}$，称为 q 点的**法坐标图**. $(y^1,\ \cdots,\ y^m)$称为关于点 $q\in M$ 的**法坐标系**.

定理 4.1.4 设$(U_q,\ \varphi,\ y^i)$为关于点 q 的法坐标图，则有

(i) $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$,

(ii) 过 q 点的测地线方程为 $y^i=a^i t$, $a^i=\text{const.}$,

(iii) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(0)=0$, 即 $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right)_q=0$.

证明 首先

$$\varphi(q)=\psi\circ\exp_q^{-1}(q)=\psi(0)=(\overbrace{0,\ \cdots,\ 0}^{m}).$$

注意到微分同胚诱导的切映射是同构，故由法坐标系的作法易见 $\left(\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)_q=e_i$. 因此，

$$g_{ij}(0)=g_q\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_q,\ \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_q\right)=g_q(e_i,\ e_j)=\delta_{ij}.$$

其次，根据法坐标系的定义及命题 4.1.2，满足初始条件 $\gamma(0)=q$, $\gamma'(0)=v=a^i e_i$ 的测地线 γ_v 是

$$\begin{aligned}\gamma_v(t)&=\exp_q(tv)=\exp_q\circ\psi^{-1}(ta^1,\ \cdots,\ ta^m)\\&=\varphi^{-1}(ta^1,\ \cdots,\ ta^m).\end{aligned}$$

故沿测地线 γ_v 的法坐标为

$$(y^1,\ \cdots,\ y^m)=\varphi(\gamma_v(t))=(ta^1,\ \cdots,\ ta^m),\qquad |t|<\varepsilon.$$

这就是(ii).

现证(iii). 因为测地线方程与坐标系选取无关，故在法坐标系(y^i)下，也是(4.1.3)形状，即

$$\frac{d^2y^i}{dt^2}+\begin{Bmatrix} i\\ jk\end{Bmatrix}\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^k}{dt}=0,$$

这里$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}$表示在法坐标系 (y^i) 下的克氏符号．把(ii)的测地线方程代入上式，便得$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}_{\gamma_v(t)} a^j a^k = 0$． 特别有$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}_0 a^i a^k = 0$. 由于$a^i$的任意性及黎曼联络的对称性，便得$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}(0) = 0$． 再从克氏符号的定义式(3.2.4)，易知

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = g_{js} \overline{\left\{ {l \atop ik} \right\}} + g_{il} \overline{\left\{ {l \atop jk} \right\}}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \left\{ {k \atop i\ j} \right\} \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

因此，$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}(0) = 0$ 等价于 (iii)．▌

现在回到定理 4.1.3 中(iii)所述的点 $q \in W$ 和开集 $U_q \subset M$，我们有

定理 4.1.5 (Gauss 引理) 在 U_q 中过 q 的测地线是 M 中超曲面

$$\{\exp_q(v) \mid v \in T_q(M),\ \|v\| = \text{const.} < \varepsilon\}$$

的正交轨线．

定理所述的超曲面称为**测地超球面**．

证明 令 $s \mapsto v(s) \in T_q(M)$ 表示 $T_q(M)$ 中的一条曲线，它满足$\|v(s)\| = 1$．我们只需证明 U_q 中的曲线

$$s \mapsto \exp_q(t_0 v(s)), \quad s \in I = [0, 1], \quad 0 < t_0 < \varepsilon$$

与径向测地线

$$t \mapsto \exp_q(t v(s_0)), \quad 0 < t < \varepsilon, \quad s_0 \in I$$

是正交的．考虑参数化曲面 $F: (0, \varepsilon) \times I \to M$,

$$(t, s) \mapsto F(t, s) = \exp_q(t v(s)), \quad 0 < t < \varepsilon, \quad s \in I,$$

且令
$$F'_t = F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad F'_s = F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)$$

因此，只要证明对所有的(t, s),

$$\langle F'_t, F'_s \rangle = 0.$$

因为 $t \mapsto F(t, s_0)$是测地线，故

$$\nabla_{F'_t}F'_t=0.$$

此外，$\|F'_t\|=1$ 及

$$[F'_t,\ F'_s]=F_*\left[\frac{\partial}{\partial t},\ \ \frac{\partial}{\partial s}\right]=0,$$

故有

$$F'_t\langle F'_t,\ F'_s\rangle=\langle F'_t,\ \nabla_{F'_t}F'_s\rangle=\langle F'_t,\ \nabla_{F'_s}F'_t\rangle$$

$$=\frac{1}{2}F'_s\langle F'_t,\ F'_t\rangle=0.$$

即$\langle F'_t,\ F'_s\rangle$与 t 无关，但当 $t\to 0$ 时又有

$$\lim_{t\to 0}F(t,\ s)=q.$$

故 $\lim\limits_{t\to 0}F'_s=0$，从而

$$\langle F'_t,\ F'_s\rangle=0. \ \blacksquare$$

用 $S_q(r)$表示测地超球面

$$S_q(r)=\{\exp_q(v)\,|\,v\in T_q(M),\ \|v\|=r\},$$

记 $U_q\backslash\{q\}\equiv\bigcup\limits_{0<r<s}S_q(r)$，讨论 $(U_q\backslash\{q\},\ \exp_q^{-1})$，可用 $(r,\ \theta^1,\ \cdots,\ \theta^{m-1})\in(0,\ s)\times S^{m-1}(1)$来表示 $U_q\backslash\{q\}$中的点的坐标．由 Gauss 引理，度量形式可表成

$$ds^2=dr^2+\sum_{i,j=1}^{m-1}g_{ij}(r,\ \theta)d\theta^i d\theta^j, \tag{4.1.7}$$

这样的坐标系称为**测地极坐标系**．据此，

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|=\left\langle\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle^{\frac{1}{2}}=1.$$

命题 4.1.6 在除去原点的法坐标图中，径向函数

$$r=\sqrt{\sum_i(y^i)^2}$$

的梯度 grad r 是 $\dfrac{\partial}{\partial r}$.

证明 如所知，一个函数 f 的梯度 grad$f$ 是一个向量场，其定

义为对任何的 $X\in\mathscr{X}(M)$,

$$\langle \text{grad} f,\ X\rangle = df(X) = Xf.$$

使用测地极坐标系 $r,\ \theta^1,\ \cdots,\ \theta^{m-1}$, 若

$$X=\eta\frac{\partial}{\partial r}+\sum_{i=1}^{m-1}\xi^i\frac{\partial}{\partial\theta^i},$$

则

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial r},\ X\right\rangle=\eta=\eta\frac{\partial r}{\partial r}+\sum_{i=1}^{m-1}\xi^i\frac{\partial r}{\partial\theta^i}=Xr.$$

故 $\text{grad}\ r=\dfrac{\partial}{\partial r}$. ▮

顺便指出, 在自然标架下,

$$\text{grad}\ f=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

故 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 为其共变分量, $g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 为其反变分量.

现在我们来证明小范围内测地线的最短性. 为此, 先叙述下列引理.

引理 2 对于定理 4.1.5 所述的测地超球面, 在 U_q 中连接以 q 为中心的两个同心测地超球面的最短曲线是测地射线段.

证明 考虑任一分段光滑曲线 $\sigma:[a,\ b]\to U_q\backslash\{q\}$, 由定理 4.1.3, 其上每点 $\sigma(t)$ 均可唯一地表为 $\exp_q(r(t)v(t))$ 的形状, 其中 $0<r(t)<\varepsilon$, $v(t)\in T_q(M)$, $\|v(t)\|=1$. 于是, 为了证明引理 2, 只须证明 σ 的长度 L_σ 满足

$$L_\sigma=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt\geqslant|r(b)-r(a)|,$$

其中等式仅当函数 $r(t)$ 单调且函数 $v(t)$ 为常值时才成立.

令 $F(r,\ t)=\exp_q(rv(t))$, 因而 $\sigma(t)=F(r(t),\ t)$. 于是,

$$\sigma'(t)=\frac{\partial F}{\partial r}r'(t)+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

根据 Gauss 引理, 上式右端的两个向量相互正交, 并且

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial r} \right\| = 1,$$

所以 $$\|\sigma'(t)\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^2 \geqslant |r'(t)|^2,$$

其中等号仅当 $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ 时才成立，即仅当 $\frac{dv}{dt} = 0$ 时才成立. 因此，

$$L_\sigma = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \geqslant \int_a^b |r'(t)| dt \geqslant |r(b) - r(a)|,$$

式中等号仅当 $r(t)$ 单调且 $v(t)$ 为常值时才成立，即仅当 $\sigma(t)$ 为测地射线段时才成立. ▌

定理 4.1.7 设 p_0 为黎曼流形 M 上任一点，则存在 p_0 的一个邻域 W 和正数 ε，使得对于连接 W 内任两点的长度 $<\varepsilon$ 的测地线 $\gamma:[0, l]\to W$ 和连接同样两点的任何分段光滑曲线 $\sigma:[0, l]\to M$ 恒有

$$\gamma \text{ 的长度 } L_\gamma \leqslant \sigma \text{ 的长度 } L_\sigma,$$

其中等式仅当 $\sigma([0, l])$ 与 $\gamma([0, l])$ 重合时才成立.

证明 对于 $p_0 \in M$，考虑定理 4.1.3 所述的邻域 W 和正数 ε. 记 $p = \gamma(0)$，$q = \gamma(l)$. 由定理 4.1.3，指数映射 $\exp_p: N_\varepsilon(p) \to U_p$ 是微分同胚. 于是，q 可唯一表为

$$q = \gamma(l) = \exp_p(L_\gamma v),\ L_\gamma < \varepsilon,\ v \in T_p(M),\ \|v\| = 1.$$

（i）先设 σ 完全位于 U_p 中. 对任何充分小的 $\delta > 0$，曲线 σ 必定含有一个线段，把中心为 p 半径为 δ 的测地超球面连接到同心的半径为 L_γ 的测地超球面，并位于这两个超球面之间. 根据引理 2，这个线段的长度将 $\geqslant L_\gamma - \delta$. 令 $\delta \to 0$，则 σ 的长度 $L_\sigma \geqslant L_\gamma$，其中等号仅当 σ 本身也是测地射线时才成立. 由于 U_p 中连结两点的测地线的唯一性，这时 $\sigma([0, l])$ 必与 $\gamma([0, l])$ 重合.

（ii）现考虑曲线 σ 不完全位于 U_p 中. 记 $\overline{U}_p = U_p \cup \partial U_p$，其中 ∂U_p 是 M 上以 p 为中心半径为 ε 的测地超球面. 令 $t_1 \in [0, a]$ 是使 $\sigma(t_1) = q_1 \in \partial U_p$ 的第一个点，$\tilde{\gamma}$ 是 $\overline{U}_p$ 中从 p 到 q_1 的径向

测地线，$\tilde{\sigma}=\sigma|_{[0,t_1]}$ 是曲线 σ 在 $[0, t_1]$ 上的限制，则 $L_\sigma \geqslant L_{\tilde{\sigma}}$. 根据上述(i)的论证，注意到 $q\overline{\in}\partial U_p$($q$ 是 $\bar{U}_p$ 的内点)，$q_1\in\partial U_p$，我们就有

$$L_\sigma \geqslant L_{\tilde{\sigma}} \geqslant L_{\tilde{\gamma}} > L_\gamma. \quad \blacksquare$$

1.2 测地完备性

设 (M, g) 为黎曼流形，M 上分段光滑曲线 $\sigma:[a, b]\to M$ 的长度为

$$L(\sigma)=\int_a^b \|\sigma'(t)\|dt.$$

M 上两点 p, q 之间的距离定义为

$$\rho(p, q)=\inf\{L[\sigma]\,|\,\sigma(a)=p,\ \sigma(b)=q\},$$

并且 M 以此作为距离空间的拓扑与 M 原来的流形拓扑是等价的(第二章，§3.3).

定义 4.1.3 设 $\gamma:[a, b]\to M$ 为测地线，若它的长度 $L[\gamma]=\rho(\gamma(a), \gamma(b))$，则称 γ 是极小的.

定理 4.1.7 表明，测地线的任何充分小段是极小的，但较长时，可能不是极小的．此外，极小测地线也可能不是唯一的．例如，球面 S^m 的两个对径点，可用无限多条极小测地线(大圆周)连起来.

命题 4.1.8 设 $p\in M$，$B_r(0)$ 为 $T_p(M)$ 上半径为 r 的开球，其上指数映射 $\exp_p:B_r(0)\to\tilde{N}_r(p)=\exp_p(B_r(0))$ 是微分同胚. 若 $q\overline{\in}\tilde{N}_r(p)$，则存在点 $q'\in\partial\tilde{N}_r(p)=\{\exp_p v\,|\,v\in T_p(M),\ \|v\|=r\}$，使得

$$\rho(p, q)=r+\rho(q', q).$$

证明 设 $\sigma(t):[0, 1]\to M$ 是从 p 到 $q=\sigma(1)$ 的分段光滑曲线，因为 $q\overline{\in}\tilde{N}_r(p)$，故存在第一个值 t_1，使 $\sigma(t_1)\in\partial\tilde{N}_r(p)$. 根据

定理 4.1.7 及 $\partial\tilde{N}_r(p)$ 的定义，可见

$$L[\sigma]=L[\sigma|_{[0,t_1]}]+L[\sigma|_{[t,1]}]\geqslant r+L[\sigma|_{[t_1,1]}]$$
$$\geqslant r+\rho(\sigma(t_1),\ q)\geqslant r+\rho(\partial\tilde{N}_r(p),\ q), \tag{4.1.8}$$

这里

$$\rho(\partial\tilde{N}_r(p),\ q)=\inf_{q'}\{\rho(q',\ q)\,|\,q'\in\partial\tilde{N}_r(p)\}.$$

由于 $\partial\tilde{N}_r(p)$ 是紧致的，故存在 $q'\in\partial\tilde{N}_r(p)$，使

$$\rho(q',\ q)=\rho(\partial\tilde{N}_r(p),\ q).$$

把它引入(4.1.8)，得

$$L[\sigma]\geqslant r+\rho(q',\ q).$$

从而

$$\rho(p,\ q)=\inf_{\sigma}\{L[\sigma]\}\geqslant r+\rho(q',\ q). \tag{4.1.9}$$

另一方面，由三角不等式

$$\rho(p,\ q)\leqslant\rho(p,\ q')+\rho(q',\ q)=r+\rho(q',\ q). \tag{4.1.10}$$

(4.1.9)和(4.1.10)联合起来就证明了命题. ▮

定义 4.1.4 设 $(M,\ g)$ 为连通黎曼流形. 如果对于所有的 $p\in M$ 及所有的 $V\in T_p(M)$，$\exp_p(V)$ 都是有意义的，则称 M 是测地完备的.

显见，定义中的要求等价于下述条件：对每一个测地线段 γ_0: $[a,\ b]\to M$，都可拓广为一条测地线 $\gamma:\boldsymbol{R}\to M$，并且 $\gamma|_{[a,b]}=\gamma_0$.

定理 4.1.9(Hopf-Rinow) 下述诸论述是等价的：

(i) M 是具有距离

$$S(p,\ q)=\inf_{\sigma}\{L[\sigma]\,|\,\sigma(a)=p,\ \sigma(b)=q\}$$

的完备度量空间；

(ii) 对某个 $p\in M$，$\exp_p$ 是在整个 $T_p(M)$ 上定义的；

(iii) M 是测地完备的.

这些条件的任一个又推得：

(iv) M 的任何两点都能以极小测地线相连接.

注：(i) 是一个十分自然的假设，特别当 M 为紧致时，它是成立的. (i)与 (iii) 表明不必区分测地完备性和度量完备性. 因此今后将简单地使用术语"完备黎曼流形". 此外，(iii)，(iv)是非常重要的. 当应用几何和分析工具来研究流形 M 时，条件(iv)可说是必须的.

现来证明定理.

证明 (ii)⇒(i). 设(ii)成立. 先证明任何 $q\in M$ 都能用极小测地线与 p 点相连接. 设

$$\tilde{N}_r(p)=\exp_p(B_r(0))$$

为法坐标球. 可假定 $q\overline{\in}\tilde{N}_r(q)$，故据命题 4.1.8, 存在 $q'\in\partial\tilde{N}_r(p)$ 使得

$$\rho(p,\ q)=r+\rho(q',\ q). \tag{4.1.11}$$

再设 $\gamma:[0,\ +\infty)\to M$ 为正规测地线，使得 $\gamma|_{[0,r]}$ 是从 p 到 q' 的唯一的测地线，易见使

$$\rho(p,\ \gamma(t))+\rho(\gamma(t),\ q)=t+\rho(\gamma(t),\ q)=\rho(p,\ q) \tag{4.1.12}$$

成立的 t 的集合为闭集. 令 $t_0\in[r,\ \rho(p,\ q)]$ 为其最大值，若 $t_0<\rho(p,\ q)$，设 $\tilde{N}_{r_1}(\gamma(t_0))$ 是环绕 $\gamma(t_0)$ 的一个法坐标球，则又存在 $q''\in\partial\tilde{N}_{r_1}(\gamma(t_0))$ 使得

$$\rho(\gamma(t_0),\ q)=\rho(\gamma(t_0),\ q'')+\rho(q'',\ q).$$

于是我们有

$$\rho(p,\ q)=\rho(p,\ \gamma(t_0))+\rho(\gamma(t_0),\ q'')+\rho(q'',\ q).$$

再利用三角不等式得到

$$\rho(p,\ \gamma(t_0))+\rho(\gamma(t_0),\ q'')=\rho(p,\ q''), \tag{4.1.13}$$

$$\rho(p,\ q)=\rho(p,\ q'')+\rho(q'',\ q),$$

设 σ 为从 $\gamma(t_0)$ 到 q'' 的唯一的一条极小正规测地线，则有

$$L[\sigma]=\rho(\gamma(t_0),\ q''),\qquad L[\gamma|_{[0,t_0]}]=\rho(q,\ \gamma(t_0)).$$

记
$$\tilde{\gamma}=\gamma|_{[0,t_0]}:[0,\ t_0]\to M,$$
则有
$$L[\tilde{\gamma}\cup\sigma]=\rho(p,\ q'')=t_0+r_1$$
故据定理 4.1.7, $\tilde{\gamma}$ 和 σ 一起组成一条连接 p 和 q'' 的极小，正规测地线：

$$\tilde{\gamma}\cup\sigma=\gamma|_{[0,t_0+r_1]}$$

使得
$$\rho(p,\ q)=\rho(p,\ \gamma(t_0+r_1))+\rho(\gamma(t_0+t_1),\ q),$$
这与 t_0 是使(4.1.12)成立的最大的值不符，从而有 $t_0=\rho(p,\ q)$。也即任何点 $q\in M$ 均能以极小测地线与 p 相连接.

今设 $\{q_i\}$ 为 M 上任一个 Cauchy 序列，由以上所证，设 γ_i: $[0,t_i]\to M$ 为连接 p 和 q_i 的极小、正规测地线，使得 $\gamma_i(t_i)=q_i$. 易见 $\{t_i\}$ 同样为 Cauchy 序列，设以 t_0 为极限. 设 $\gamma_i'(0)=V_i$, 由于单位球面的紧致性，不妨设 $\{V_i\}$ 在此单位球面上收敛于 V. 令 γ: $[0,\ +\infty)\to M$ 为正规测地线，使得 $\gamma'(0)=V$. 根据常微分方程的解关于其初始条件的连续依赖性，由测地线方程就得到

$$q_i=\gamma_i(t_i)\to\gamma(t_0)\in M.$$

这就完成了证明.

(i)⟹(iii). 对任给的 $p\in M$ 和 $v\in T_p(M)$, 设 $[0,\ t_0)$ 为最大的半开区间，其上存在正规测地线

$$\gamma(t)=\exp_p tv/\|v\|,\qquad t\in[0,\ t_0).$$

使得
$$\gamma(0)=p,\qquad \gamma'(0)=v/\|v\|.$$
设 $t_i\nearrow t_0$, $\{\gamma(t_i)\}$ 为 Cauchy 序列，根据(i)，它具有极限点 q, 定义 $\gamma(t_0)=q$. 这样，$\gamma|_{[0,t_0]}$ 是连续的. 令 $\tilde{N}_r(q)$ 为环绕 q 的法坐标球，r 充分小. 显然，存在一个正整数，N, 当 $i>N$ 时

$$\gamma(t_i)=q_i\in\tilde{N}_r(q).$$

据定理 4.1.3、定理 4.1.7, 对 $m,\ n>N$ 我们有

$$\rho(q_m, q_n)<r, \quad \rho(q_n, q)<r.$$

固定 n, 且设 $m>n$, 则

$$\rho(q_n, q_m)+\rho(q_m, q)=(t_m-t_n)+\rho(q_m, q).$$

令 $n>N$ 且 $m\to+\infty$ 时，有

$$\rho(q_n, q)=t_0-t_n.$$

于是对于 $m>n>N$,

$$\rho(q_n, q)=t_0-t_n=\rho(q_n, q_m)+\rho(q_m, q).$$

因此，测地线段 $\gamma|_{[t_n,t_m]}$ 可以延拓为测地线段 $\gamma|_{[t_n,t_0]}$. 即 $\gamma|_{[0,t_0)}$ 可延拓为测地线段 $\gamma|_{[0,t_0]}$. 根据存在定理，测地线段 $\gamma(t)$, $0<t<t_0$ 可延拓至端点，即 t_0 之外，这与原先对 t_0 的假定不符.

(iii)⇒(ii) 是平凡的.

(iii)⇒(iv) 与 (ii)⇒(i) 的证明的前一半相同. ∎

例　设 S^m 是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的 m 维球面，S^m 上的测地线是大圆，即 S^m 与过其中心的平面的截线. 事实上，关于平面 $\boldsymbol{R}^2$ 的反射是一个等距 $\mathscr{I}:S^m\to S^m$. 其固定点的集合为

$$C=S^m\cap\boldsymbol{R}^2.$$

设 p、$q(\in C)$具有唯一的一条测地 C', 使得

$$L[C']=\rho(p, q)$$

则因 $\mathscr{I}$ 是一个等距，曲线 $\mathscr{I}(C')$是 $\mathscr{I}(p)=p$ 和 $\mathscr{I}(q)=q$ 之间的测地线，且与 C' 有相同的长度，因而 $\mathscr{I}(C')=C'$, 故得

$$C'\subset C=S^m\cap\boldsymbol{R}^2.$$

圆柱面 Q 上的测地线是母线及由垂直于母线的平面截得的圆周以及 Q 上的螺旋线. 事实上，设 l 为 Q 的一条母线，我们可作一个等距 $\mathscr{I}:Q-l\to\boldsymbol{R}$, 将 Q 展平在 $\boldsymbol{R}^2$ 上，Q 上的测地线是 $\boldsymbol{R}^2$的直线在 $\mathscr{I}^{-1}$ 下的象.

习　题

1．设(M, g)为黎曼流形，$C:(a, b)\to M, t\mapsto C(t)$为光滑曲线，则参数变换$t=t(s)$后，$C$为测地线的充要条件是，曲线$C$在局部坐标下的方程$x^i=x^i(t)$满足微分方程

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=f(t)\frac{dx^i}{dt},$$

其中$f(t)$是C上的函数，t为任意参数.

2．设(M, g)和$(\overline{M}, \overline{g})$均为黎曼流形，$\phi:M\to\overline{M}$为微分同胚．如果$(M, g)$上测地线由$\phi$映为$(\overline{M}, \overline{g})$上的测地线，则称$\phi$为**射影映射**，$M$和$\overline{M}$是**射影对应的**．证明：

（i）下述诸条件是等价的：

a．$\phi:M\to\overline{M}$为射影映射.

b．将关于ϕ的对应点选取相同的局部坐标，以Γ^i_{jk}和$\overline{\Gamma}^i_{jk}$分别表示(M, g)和$(\overline{M}, \overline{g})$的克氏符号，则

$$\overline{\Gamma}^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\delta^i_j\lambda_k+\delta^i_k\lambda_j,$$

其中λ_i是一个共变向量场的分量.

c．$\{\omega^i\}$为余标架场，且以ω^i_j和$\overline{\omega}^i_j$分别表示(M, g)和$(\overline{M}, \overline{g})$的黎曼联络1-形式，则

$$\overline{\omega}^i_j=\omega^i_j+\delta^i_j d\lambda+\lambda_j\omega^i,$$

式中λ为一个函数，且λ_i由下式定义$d\lambda=\lambda_i\omega^i$.

d．以∇和$\overline{\nabla}$分别表示(M, g)和$(\overline{M}, \overline{g})$的黎曼联络，则对于任意向量场$X, Y$,

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+g(X, \lambda)Y+g(Y, \lambda)X,$$

式中λ为某一向量场.

(ii) 在射影映射下，$\overline{W}=W$，其中W称为**射影曲率张量**，它由下式定义

$$W(X, Y, Z, V)=R(X, Y, Z, V)-\frac{1}{m-1}\times(\langle X, Z\rangle S(Y, V)-\langle X, V\rangle S(Y, Z)),$$

并且与欧氏空间局部成射影对应的黎曼流形局部为常曲率空间.

3．利用法坐标系证明 Bianchi 第二恒等式和 Weitzenböck 公式(3.4.27).

4. 设(M,g)为黎曼流形．$(U;\varphi,x^i)$是以 q 为原点的法坐标图．

$$X_0=\xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q,\quad Y_0=\eta^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q$$

均为单位向量．$C:[0,r)\to M$，$s\mapsto C(s)$为在 $q=C(0)$点以 X_0 为切向量的测地线，$Y(s)$是将 Y_0 沿 C 平行移动而得的向量场．证明：

（i）在法坐标系的原点

$$\frac{\partial\begin{Bmatrix}k\\ i\ j\end{Bmatrix}}{\partial x^l}=-\frac{1}{3}(R^k{}_{ijl}+R^k{}_{jil});$$

（ii）设 $Y(s)=\zeta^i(s)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{C(s)}$，则

$$\zeta^i(s)=\eta^i+\frac{1}{6}(R^i{}_{jkl})_q\xi^j\eta^k\xi^l s^2+o(s^3),$$

（iii）若$\langle X_0,Y_0\rangle=0$，且令$\|Y(s)\|_q^2=g_{ij}(q)\zeta^i(s)\zeta^j(s)$，则

$$\|Y(s)\|_q=1+\frac{s^2}{6}R(X_0,Y_0,X_0,Y_0)+o(s^3).$$

5. 设(M,g)为黎曼流形，在过 q 点的诸测地线上作关于 q 点的对称．即将分处 q 点的两侧且与 q 点等距的点相互对应．如果关于 q 点的对称在 q 的邻域里是等距变换，则$(\nabla R)_q=0$．

6. 给出一个黎曼流形 M，它与 $\boldsymbol{R}^m$ 微分同胚，但 M 上的测地线不能无限延伸．

7. 设(M,g)和$(\overline{M},\overline{g})$均为黎曼流形，证明：

（i）若 $\phi:M\to\overline{M}$ 为等距同胚，则 ϕ 将(M,g)的测的测地线映为$(\overline{M},\overline{g})$的测地线．

（ii）若 $\phi_1,\phi_2:M\to M$ 均为等距变换，(M,g)是完备、连通的，且存在一点 p，使得 $\phi_1(p)=\phi_2(p)$和 $\phi_{1*_p}=\phi_{2*_p}$，则 $\phi_1\equiv\phi_2$．

8. 设(M,g)为完备黎曼流形，$\gamma:[0,+\infty)\to M$，$s\to\gamma(s)$为测地线，其中 s 为弧长参数，如果 $s=\rho(\gamma(0),\gamma(s))$，其中 ρ 是距离函数，则称 γ 为从 $\gamma(0)$点出发的射线．设 p 为非紧致完备黎曼流形(M,g)上任意一点，证明，M 上存在从 p 出发的一条射线．

9. 设 m 维黎曼流形(M,g)在测地极坐标系$(r,\theta^1,\cdots,\theta^{m-1})$下具有度量形式

$$ds^2=(dr)^2+(f(r))^2h_{ij}(\theta)d\theta^i d\theta^j\qquad(1\leqslant i,\ j\leqslant m-1),$$

其中 $m-1$ 维度量 $d\sigma^2=h_{ij}(\theta)d\theta^i d\theta^j$ 具有常数截面曲率 1．求证 ds^2 具有常数截面曲率 c 的充要条件是

$$f(r)=\begin{cases}\sin(\sqrt{cr^2})/\sqrt{c}, & 若\ c>0,\\ r, & c=0,\\ \mathrm{sh}(\sqrt{cr^2})/\sqrt{-c} & c<0.\end{cases}$$

§2 弧长的变分

2.1 弧长的变分

设 M 和 N 都是 C^∞ 微分流形且 M 具有联络 ∇, $f:N\to M$ 为嵌入. 沿 f 的向量场是指对任意的 $p\in N$, 在 $f(p)$ 点取定一个切向量 $W\in T_{f(p)}(M)$. 设$\{e_i\}$, $i=1, \cdots, m$ 是在 $f(p)\in M$ 的邻域里的局部标架场. 于是可写成

$$W(p)=\zeta^i(p)e_i(f(p)). \tag{4.2.1}$$

如果函数 $\zeta^i(p)$都是光滑的，则称向量场 W 是光滑的.

设$X\in T_p(N)$, 定义 W 沿方向X的共变导数$\tilde{\nabla}_X W\in T_{f(p)}(M)$如下:

$$\tilde{\nabla}_X W=(X\zeta^i)_{(p)}e_i(f(p))+\zeta^i(p)\nabla_{f_*X}e_i(f(p)). \tag{4.2.2}$$

容易证明，这个定义与$\{e_i\}$的选取是无关的.

若 M 为黎曼流形且 ∇ 为黎曼联络, W_1 和 W_2 都是沿f 的向量场，则不难验证，对 $X\in T_p(N)$有

$$X\langle W_1, W_2\rangle=\langle\tilde{\nabla}_X W_1, W_2\rangle+\langle W_1, \tilde{\nabla}_X W_2\rangle. \tag{4.2.3}$$

同样，如果 X_1、X_2 为 N 的向量场，则 f_*X_1 和 f_*X_2 都是沿 f 的向量场，且有

$$\tilde{\nabla}_{X_1}(f_*X_2)-\tilde{\nabla}_{X_2}(f_*X_1)=f_*([X_1, X_2]). \tag{4.2.4}$$

以下为了方便，常不使用符号 $\tilde{\nabla}$($\tilde{\nabla}$ 也称为诱导联络)，且将沿 f 的向量场看作为定义在 M 上的向量场，即我们有

$$\tilde{\nabla}_X W=\nabla_{f_*X}W.$$

设(M, g)为黎曼流形,$\sigma:[a, b]\to M$ 是分段光滑曲线，其长度

$$L[\sigma]=\int_a^b\|\sigma'(t)\|dt.$$

作光滑映射

$$\alpha:Q\equiv[a,\ b]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M,\qquad (t,\ s)\mapsto\alpha(t,\ s),$$

使得 $$\alpha_0\equiv\alpha|_{[a,b]\times\{0\}}=\sigma:[a,\ b]\to M,$$

则称 α 定义了曲线 σ 的光滑变分. 记

$$T=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\ V=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right).$$

先来计算曲线族

$$\alpha_s=\alpha|_{[a,b]\times\{s\}}$$

中弧长的变化. 以 $L(s)$ 表示曲线 α_s 的弧长, 则我们有

$$\frac{d}{ds}L(s)=\frac{d}{ds}\int_a^b\langle\alpha_s'(t),\ \alpha_s'(t)\rangle^{\frac{1}{2}}dt=\int_a^b\nabla_V\langle T,\ T\rangle^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\int_a^b\langle\nabla_VT,\ T\rangle\|T\|^{-1}dt.\tag{4.2.5}$$

由于在 Q 上

$$\left[\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial s}\right]=0.$$

故利用(4.2.4), 上式可写成

$$\frac{d}{ds}L(s)=\int_a^b\|T\|^{-1}\langle\nabla_TV,\ T\rangle dt.\tag{4.2.6}$$

再选定曲线 σ 是正比于弧长参数化的, 即 $\|\alpha_0'\|=l$ ($=$const.), 故

$$\frac{d}{ds}L(s)_{s=0}=\frac{1}{l}\int_a^b\{T\langle V,\ T\rangle-\langle V,\ \nabla_TT\rangle\}dt.\tag{4.2.7}$$

积分第一项即得

定理 4.2.1 曲线 σ 的弧长的第一变分公式为

$$\frac{d}{ds}L(s)|_{s=0}=\frac{1}{l}\left\{\langle V,\ T\rangle\Big|_a^b-\int_a^b\langle V,\ \nabla_TT\rangle dt,\right\}\tag{4.2.8}$$

式中 $T=\sigma'(t)$ 为 σ 的切向量.

特别, 如果所有的曲线 α_s 都有相同的端点, 则

$$V(a,\ 0)=V(b,\ 0)=0.$$

此时，上式成为

$$\frac{d}{ds}L(s)\Big|_{s=0}=-\frac{1}{l}\int_a^b\langle V,\ \nabla_T T\rangle dt. \tag{4.2.9}$$

如果 $\alpha_0=\sigma$ 是从 $\sigma(a)$ 到 $\sigma(b)$ 的长度最短的曲线，则对于任何映射 $\alpha:Q\to M$ 有

$$\frac{d}{ds}L(s)\Big|_{s=0}=0.$$

因此，若 σ 又是光滑的，作一个变分使得

$$V=\varphi(t)\nabla_T T,$$

其中函数 $\varphi(t)$ 满足条件，

$$\varphi(t)>0,\quad a<t<b,\quad \varphi(a)=\varphi(b)=0,$$

则得
$$\nabla_T T=\nabla_{\sigma'}\sigma'=0,$$

即 $\sigma:[a,\ b]\to M$ 为测地线. 特别当 $l=\|\sigma'\|=1$ 时，σ 为正规则地线，从而有

命题 4.2.2 设 σ 为光滑曲线且是连接其端点的最短曲线，则 σ 为测地线.

设 $\gamma:[a,\ b]\to M$ 为正规测地线，设

$$\alpha:D=[a,\ b]\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\times(-\delta,\ \delta)\to M$$

为光滑映射，且使得

$$\alpha_{0,0}(t)\equiv\alpha(t,\ 0,\ 0)=\gamma(t),$$

即 α 是正规测地线 γ 的双参数变分，令 $L(v,\ w)$ 是曲线 $\alpha_{v,w}:t\mapsto\alpha(t,\ v,\ w)$ 的弧长，即

$$L(v,\ w)=\int_a^b\|T\|dt.$$

我们已置

$$T=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad V=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right),\quad W=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

与弧长的第一变分公式(4.2.5)一样，有

$$\frac{\partial}{\partial v} L(v, w) = \int_a^b \|T\|^{-1}\langle \nabla_T V, T\rangle dt. \tag{4.2.10}$$

据此，利用 Ricci 恒等式有

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial v} L(v, w) = \frac{\partial}{\partial w}\int_a^b \|T\|^{-1}\langle \nabla_T V, T\rangle dt$$

$$= \int_a^b \{\|T\|^{-1}[\langle \nabla_W \nabla_T V, T\rangle + \langle \nabla_T V, \nabla_W T\rangle]$$

$$- \langle \nabla_T V, T\rangle \frac{\langle \nabla_W T, T\rangle}{\|T\|^3}\Big\} dt$$

$$= \int_a^b \Big\{\|T\|^{-1}[\langle R(W, T)V, T\rangle + \langle \nabla_T \nabla_W V, T\rangle$$

$$+ \langle \nabla_T V, \nabla_W T\rangle] - \frac{\langle \nabla_T V, T\rangle\langle \nabla_T W, T\rangle}{\|T\|^3}\Big\} dt. \tag{4.2.11}$$

由于 $\|T\|_{\alpha(t,0,0)} = 1, \quad \nabla_T T_{\alpha(t,0,0)} = 0.$

利用以上记号即得

定理 4.2.3 正规测地线的弧长的第二变分公式为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial v}\Big|_{(0,0)} = \int_a^b \{\langle \nabla_T V, \nabla_T W\rangle$$

$$+ T\langle \nabla_W V, T\rangle - \langle R(W, T)T, V\rangle$$

$$- T\langle V, T\rangle T\langle W, T\rangle\} dt = \langle \nabla_W V, T\rangle \Big|_a^b$$

$$+ \int_a^b \{\langle \nabla_T V, \nabla_T W\rangle - \langle R(W, T)T, V\rangle$$

$$- T\langle V, T\rangle T\langle W, T\rangle\} dt. \tag{4.2.12}$$

现沿测地线 $\gamma(t)$ 命

$$V = f_1(t)T + \widetilde{V}, \quad W = f_2(t)T + \widetilde{W},$$

其中 $\widetilde{V}$ 和 $\widetilde{W}$ 是关于 γ 的正交分量，即 $\langle \widetilde{V}, T\rangle = 0$, $\langle \widetilde{W}, T\rangle = 0$.

那末我们有

$$\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle = \langle \nabla_T \widetilde{V},\ \nabla_T \widetilde{W}\rangle + f_1' f_2',$$
$$-T\langle V,\ T\rangle T\langle W,\ T\rangle = -f_1' f_2',$$
$$-\langle R(W,\ T)T,\ V\rangle = -\langle R(\widetilde{W},\ T)T,\ \widetilde{V}\rangle.$$

把这些代入(4.2.12)，便得

$$\left.\frac{\partial L}{\partial w \partial v}\right|_{(0,0)} = \langle \nabla_W V,\ T\rangle\Big|_a^b + \int_a^b \{\langle \nabla_T \widetilde{V},\ \nabla_T \widetilde{W}\rangle - \langle R(\widetilde{W},\ T)T,\ \widetilde{V}\rangle\} dt. \qquad (4.2.12')$$

因此，若变分向量场 V 和 W 与 γ 正交，或更一般地设 $\langle V,\ T\rangle$ 或 $\langle W,\ T\rangle$ 沿 γ 为常值，且若在 γ 的两端点处 $\nabla_W V=0$，则弧长的第二变分公式就取如下形状：

$$I(V,\ W) \equiv \left.\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial v}\right|_{(0,0)} = \int_a^b \{\langle \nabla_T V,\ \nabla_T W\rangle + \langle R(T,\ W)T,\ V\rangle\} dt. \qquad (4.2.13)$$

这个积分称为**指标形式** $I(V,\ W)$. 对于沿 γ 为分段光滑且满足 $\langle V,\ T\rangle = \langle W,\ T\rangle = 0$ 的向量场 V, W 的空间，$I(V,\ W)$ 是对称双线性形式. 若 I 对于在 γ 的端点处为零的向量场是正定的，则 γ 在具有相同端点的邻近曲线中是长度最短的曲线.

上述变分可推广到分段光滑曲线的情况. 设 $\gamma: [0,\ l] \to M$ 为分段光滑曲线，令 $\alpha: [a,\ b] \times (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to M$ 为连续映射，使得

$$\alpha_0 \equiv \alpha\Big|_{[a,b]\times\{0\}} = \gamma \quad 或 \quad \alpha(t,\ 0) = \gamma(t), \quad t \in [a,\ b].$$

若存在 $[a,\ b]$ 的一个分划

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

使得 $\alpha: [t_i,\ t_{i+1}] \times (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to M$ 是光滑的，则称 α 为 γ 的分段光滑的变分. 曲线族 $\{\alpha_s = \alpha\Big|_{[a,b]\times\{s\}},\ \ s \in (-\varepsilon,\ \varepsilon)\}$ 中曲线的弧长 $L_s: (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to \boldsymbol{R}$ 定义为

$$L_s = L[\alpha_s] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \frac{\partial \alpha(t,\ s)}{\partial t} \right\| dt = \int_a^b \left\| \frac{\partial \alpha(t,\ s)}{\partial t} \right\| dt.$$

同样，可给出双参数的分段光滑的变分，并且(4.2.13)对于双参数 v, w 的分段光滑变分也是正确的. 利用

$$\langle\nabla_T V, \nabla_T W\rangle = T\langle\nabla_T V, W\rangle - \langle\nabla_T\nabla_T V, W\rangle,$$

易得

$$I(V, W) = -\int_a^b \langle\nabla_T\nabla_T V - R(T, V)T, W\rangle dt + \sum_i \langle\Delta_{t_i}(\nabla_T V), W(t_i)\rangle, \tag{4.2.14}$$

其中 $$\Delta_{t_i}(\nabla_T V) = \lim_{t\to t_i^+}\nabla_T V - \lim_{t\to t_i^-}\nabla_T V.$$

2.2 Jacobi 场

现在进一步讨论单参数测地线族的变分场，更明确些，令

$$\alpha: [a, b]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to M, \quad (t, s)\mapsto\alpha(t, s),$$

对任意固定的 s, $\alpha(t, s)$都是测地线. 仍令

$$T = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad V = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right).$$

以下来确定 $V|_{\alpha(t, s_0)}$ 应满足的微分方程. 由于$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$, 故据(4.2.4), $\nabla_T V = \nabla_V T$. 此外，由所设 $\nabla_T T = 0$, 故

$$\nabla_T\nabla_T V = \nabla_T\nabla_V T - \nabla_V\nabla_T T,$$

由曲率张量的定义得

$$\nabla_T\nabla_T V = R(T, V)T. \tag{4.2.15}$$

上式称为 Jacobi 方程

定义 4.2.1 设 $\gamma: [0, l]\to M$ 为测地线，T 为其切向量场. 如果沿 γ 的向量场 J 满足 Jacobi 方程，则称 J 为 (沿 γ)Jacobi 场.

在 $T_{\gamma(0)}(M)$上取一个规范正交标架$\{e_i\}$, 设 $e_1 = \gamma'(0)$, 将 e_i 沿γ 平行移动成 E_i. 设 V 为沿 γ 定义的向量场

$$V = V^i E_i, \quad V^i \in C^2(\gamma([0, l])).$$

注意到 $T=\gamma'=E_1$, 故

$$\nabla_T\nabla_T V=V^{i''}E_i,\qquad R(T,\ V)T=V^iR(E_1,\ E_i)E_1,$$

于是，就得到 Jacobi 方程的一个局部表示

$$(V^j)''=V^i\langle R(E_1,\ E_i)E_1,\ E_j\rangle=V^iR_{j11i}.$$

命题 4.2.4 沿 γ 的 Jacobi 场 J 有下述性质:

(i) 沿 γ 的全体 Jacobi 场构成 $2m$ 维线性空间;

(ii) 若 $\langle J(0),\ T(0)\rangle=0,\quad \langle\nabla_T J(0),\ T(0)\rangle=0$, 则

$$\langle J,\ T\rangle=0.$$

(iii) $J^\perp\equiv J-\langle J,\ T\rangle T$ 也是沿 γ 的 Jacobi 场. 即 J 沿 γ 的法向分量也是沿 γ 的 Jacobi 场.

证明 因为 Jacobi 方程是二阶常微分方程组，故由常微分方程理论得知，这个解空间的维数即为

$$2m=2\dim M.$$

并且对于任意给定的初始值 $J(0)$ 和 $\nabla_T J(0)$ 存在唯一解 此外，易见(4.2.15)的两侧都是 $\boldsymbol{R}$-线性的，即有(i).

因为 $\nabla_T T=0$, 故由(4.2.15)

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle T,\ J\rangle=\langle T,\ \nabla_T\nabla_T J\rangle=0.$$

因此，Jacobi 场 J 可唯一地表成

$$J(t)=J_0(t)+(at+b)T(t)\qquad (a,\ b\ \text{为常数}),\qquad (4.2.16)$$

其中 J_0 满足

$$\langle T,\ J_0\rangle=0.$$

特别，若

$$\langle J(0),\ T(0)\rangle=\langle\nabla_T J(0),\ T(0)\rangle=0\quad \text{或}\quad J(0)=J(1)=0,$$

则

$$\langle J,\ T\rangle=0.$$

最后，若 J 为沿 γ 的 Jacobi 场，则

$$\nabla_T\nabla_T J^\perp=\nabla_T\nabla_T(J-\langle J,\ T\rangle T)=\nabla_T\nabla_T J-\langle\nabla_T\nabla_T J,\ T\rangle T$$
$$=R(T,\ J)T=R(T,\ J-\langle J,\ T\rangle T)T,$$

故 $J^{\perp}$ 也为沿 γ 的 Jacobi 场.

设点 $p\in M$ 附近的局部坐标为(x^i)，则$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 构成 $T_p(M)$ 的一个基. 任何切向量 $u\in T_p(M)$（可看成 $T_p(M)$中一点）可唯一地表示成

$$u=\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

因此，(ξ^i)可看成空间 $T_p(M)$的点的坐标，从而$\left\{\frac{\partial}{\partial \xi^i}\right\}$构成 $T_u(T_p(M))$的一个基. 由此，我们可以作出 $T_p(M)$与 $T_u(T_p(M))$ 之间的一个自然同构如下：令

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial \xi^i},$$

再作线性扩张，即

$$a^i\frac{\partial}{\partial x^i}\leftrightarrow a^i\frac{\partial}{\partial \xi^i}.$$

现将定理 4.1.5(Gauss 引理)推广成

命题 4.2.5 设 p 为完备黎曼流形 M 上任一点，且设 $u\in T_p(M)$，$v\in T_u(T_p(M))$. 作出 $T_u(T_p(M))$ 和 $T_p(M)$ 的自然等同，则有

$$\langle u,\ v\rangle=\langle (d\exp_p)_u u,\ (d\exp_p)_u v\rangle.$$

证明 设测地线 $\gamma(t)=\exp_p tu$ 满足 $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=u$. 考虑 $T_p(M)$上射线 $\rho(t)=tu$, 其切向量

$$\rho'(t)=\frac{d\rho(t)}{dt}=u.$$

于是

$$T(1)=\gamma'(1)=\frac{d}{dt}(\exp_p tu(\big|_{t=1}=(d\exp_p)_u\rho'(1)=(d\exp_p)_u u.$$

定义

$$\alpha(t,\ s)=\exp_p t(u+sv),\quad t\in[0,\ 1],\quad s\in(-\varepsilon,\ \varepsilon),$$

它给出了 M 上单参数测地线族. 故其变分场为沿 γ 的 Jacobi 场 $J(t)$, 且易见

$$J(0)=\frac{\partial\alpha(0,\ s)}{\partial s}\Big|_{s=0}=0,$$

$$J(t)=\frac{\partial\alpha(t,\ s)}{\partial s}\Big|_{s=0}=(d\exp_p)_{tu}tv=t(d\exp_p)_{tu}v. \tag{4.2.17}$$

从而有

$$\nabla_T J(0)=\nabla_T J(t)\big|_{t=0}=(d\exp_p)_{tu}v\big|_{t=0}=v.$$

由(4.2.16), 注意到 $J(0)=0$, 故得

$$\langle T,\ J\rangle=\langle T,\ \nabla_T J\rangle t,$$

$$\langle T,\ \nabla_T J\rangle=\text{Const}.$$

最终有

$$\langle u,\ v\rangle=\langle T(0),\ \nabla_T J(0)\rangle=\langle T(1),\ \nabla_T J(1)\rangle$$

$$=\langle(d\exp_p)_u u,\ (d\exp_p)_u v\rangle. \quad \blacksquare$$

由命题即知, $d\exp_p$ 保持向量 v 在 u 方向的任何分量的长度.

由 Jacobi 方程的导出过程即知单参数测地线族的变分场是 Jacobi 场. 反之, 有下述

定理 4.2.6 若 J 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场, 则 J 可作为某个单参数测地线族的变分场.

证明 令 $C(s)$为一条曲线, 使得 $C'(0)=J(0)$. 将 $T(0)=\gamma'(0)$ 和 $\nabla_T J(0)$ 拓广为沿曲线 $C(s)$的平行向量场 $T_s(0)$ 和 $\nabla_T J_s(0)$.

$$\alpha:(t,\ s)\mapsto\exp_{C(s)}t(T_s(0)+s\nabla_T J_s(0))$$

定义了测地线 γ 的光滑变分, 且对任意固定的 s, $\alpha(t,\ s)$都是测地线, 故其变分场 V 为 Jacobi 场. 由常微分方程理论, 余下只要验证 V 与 J 有相同的初始条件. 事实上, 我们有

$$V(0)=\frac{\partial\alpha(0,\ s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}=\frac{dC(s)}{ds}\bigg|_{s=0}=C'(0)=J(0).$$

$$V(t)=\frac{\partial\alpha(t,s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}=[(d\exp_{C(s)})_{tT_s(0)}t(\nabla_T J_s(0))]_{s=0}$$
$$=t(d\exp_{C(0)})_{tT(0)}\nabla_T J(0).$$
$$V'(0)=\nabla_T V(t)\bigg|_{t=0}=[(d\exp_{C(0)})_{tT(0)}\nabla_T J(0)]_{t=0}$$
$$=\nabla_T J(0)=J'(0).$$

现在来讨论指标形式 $I(V, W)$ 的零化空间. 以 $T_\gamma(\Omega)$ 表示沿测地线 $\gamma:[0, l]\to M$ 为分段光滑、在 γ 的端点消失，且使得 $\langle V, T\rangle=0$ 的向量场 V 所组成的向量空间，指标形式

$$I:T_\gamma(\Omega)\times T_\gamma(\Omega)\to \boldsymbol{R}$$

的零化空间是 $T_\gamma(\Omega)$ 的子空间 N_γ:

$$N_\gamma=\{V\in T_\gamma(\Omega)\,|\,I(V, W)=0,\ \forall W\in T_\gamma(\Omega)\}.$$

N_γ 的维数 ν 称为 I 的零化度，$\nu=\dim N_\gamma$. 若 $\nu>0$, 则称 I 是蜕化的.

命题 4.2.7 向量场 $V\in T_\gamma(\Omega)$ 位于 I 的零化空间 N_γ 的充要条件是 V 为 Jacobi 场.

证明 若 V 是沿 γ 的 Jacobi 场，则(4.2.14)式中

$$\Delta_{t_i}\nabla_T V=0,\quad t_i\in[0, l],\quad \nabla_T\nabla_T V-R(T, V)T=0,$$

故对任意的 $W\in T_\gamma(\Omega)$ 都有

$$I(V, W)=0,$$

即 $V\in N_\gamma$.

反之，设 $V\in N_\gamma$, 选取 $[0, l]$ 的分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=l,$$

使得对于每个 i, $V|_{(t_i,t_{i+1})}$ 都是光滑的，令 $f:[0, l]\to\boldsymbol{R}$ 为光滑函数，它在分点 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 处为零，其余处均为正，置

$$W(t)=f(t)(\nabla_T\nabla_T V-R(T, V)T)(t)$$

于是由(4.2.14),

$$I(V, W)=\int_0^l f(t)\|\nabla_T\nabla_T V-R(T, V)T\|^2 dt.$$

因为 $V\in N_\gamma$, 故对于每个 $i=0, 1, \cdots, n-1, V|_{(t_i,t_{i+1})}$ 都是 Jacobi 场.

再设 $W_1\in T_\gamma(\Omega)$ 是这样一个向量场, 对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$

$$W_1(t_j)=\Delta_{t_j}\nabla_T V.$$

于是有

$$0=I(V, W_1)=\sum_{j=1}^{n-1}\left\|\Delta_{t_j}\nabla_T V\right\|^2,$$

因而 $\nabla_T V$ 没有跳跃, 但 Jacobi 方程的解 V 完全由向量 $V(t_i)$ 和 $\nabla_T V(t_i)$ 所确定. 可见, n 个 Jacobi 场 $V|_{[t_{i-1},t_i]}i=1, 2, \cdots, n$ 合并起来给出一个 Jacobi 场, 它在整个区间 $[0, l]$ 上处处是光滑的. ▌

2.3 共轭点

如所知, 当曲线 γ 的弧长等于其端点之间的距离时, γ 是测地线. 但若 γ 很长时, 其逆并不成立. 例如单位球面上的测地线是大圆(弧), 故长度大于π的测地线不是其端点的最短连线. 并且, 从 p 到其对径点 q 有无限多条长度为 π 的测地线, 测地线在大范围上的非最短性与指数映射 exp 的临界点之间是有联系的.

设 $\varphi: M_1\to M_2$ 是流形之间的可微映射, $p\in M_1$, 如果线性映射

$$d\varphi_p: T_p(M_1)\to T_{\varphi(p)}(M_2)$$

是奇异的, 即若存在 $v\in T_p(M_1)$, $v\neq 0$ 使得

$$d\varphi_p(v)=0,$$

则 p 称为 φ 的临界点.

定义 4.2.2 若 $q=\exp_p v$为指数映射 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 的一个临界点, 则称 q 为 p(沿测地线 $\gamma(t)=\exp_p tv$) 的共轭点. 共轭点的阶数定义为 $(d\exp_p)_v: T_v(T_p(M))\to T_q(M)$的核的维数.

注意,定义中的 $T_v(V_p(M))$ 自然等同于 $T_p(M)$.

定理 4.2.8 $q=\gamma(1)$ 沿测地线 γ 共轭于点 $p=\gamma(0)$ 当且仅当存在沿 γ 的非零 Jacobi 场,使得

$$J(0)=J(1)=0.$$

因此,q 共轭于 p 当且仅当 p 共轭于 q,并且共轭点的阶数等于指标形式 $I(V, W)$ 的零化空间 N_γ 的维数.

证明 设 $q=\exp_p v$, $v\in T_p(M)$, 且 q 沿测地线

$$\gamma(t)=\exp_p tv$$

共轭于 q, 即存在 $w\in T_v(T_p(M))$, 使得 $(d\exp_p)_v w=0$. 将切空间 $T_v(T_p(M))$ 与 $T_p(M)$ 等同,在 $T_p(M)$ 中作射线

$$\rho_s(t)=(v+sw)t,$$

再作出测地线

$$\gamma_s(t)=\exp_p\circ\rho_s(t),$$

因此得到由 p 出发的单参数测地线族. 由于

$$\frac{d}{ds}(\exp_p\circ\rho_s(1))\Big|_{s=0}=0,$$

故单参数测地线族 $\{\gamma_s\}$ 的变分场——Jacobi 场 $\frac{d}{ds}\gamma_s(t)$ 在 $q=\gamma(1)$ 点消失. 此外,易知它在 $p=\gamma(0)$ 点也消失. 即存在沿 γ 的非零 Jacobi 场 J, 使得

$$J(0)=J(1)=0.$$

反之,如果存在沿 γ 的非零 Jacobi 场 J 使得上式成立,则仿定理 4.2.6 的证明,

$$\alpha(t, s)=\exp_{\gamma(0)}t(T(0)+s\nabla_T J(0))$$

的变分场即为 J, 并且

$$(d\exp_p)_{\gamma'(0)}\nabla_T J(0)=J(1)=0.$$

因此 q 是 p 的共轭点.

因为 Jacobi 场的条件关于 p 和 q 是对称的,故具有共轭性,

即若 q 共轭于 p, 则 p 也共轭于 q. 最后部分结论得自命题 4.2.7 和定义 4.2.2.

由定理可得下述两个推论.

推论 1 若 $\gamma(a)$和 $\gamma(b)$ 沿测地线 γ 不是共轭的, 则沿 γ 的一个 Jacobi 场是由其在 $\gamma(a)$和 $\gamma(b)$的值所完全确定的.

推论 2 指标形式具有非平凡零化空间当且仅当$\gamma(a)$和$\gamma(b)$是沿测地线 γ 共轭的.

最后来讨论常曲率黎曼流形上的 Jacobi 场和共轭点. 设 M 具有常数截面曲率 K_0, 且 $\gamma:[0, l]\to M$ 为测地线, 则 Jacobi 场方程(4.2.15)成为

$$\nabla_T\nabla_T J(t)+K_0\|T(t)\|^2 J(t)=K_0\langle T, J\rangle T,$$

其中
$$T(t)\equiv\frac{d\gamma}{dt}=\gamma'(t).$$

因此, 对于满足$\langle J, \gamma'(t)\rangle=0$ 的 Jacobi 场具有下述形式

$$J(t)=\mu(t)A(t),$$

其中向量场 $A(t)$沿 γ 是平行的且与 γ 正交, 即

$$\langle A(t), \gamma'(t)\rangle=0, \quad \nabla_{\gamma'}A=0.$$

而 $\mu(t)$满足方程

$$\mu''(t)+K_0\|\gamma'\|^2\mu(t)=0, \tag{4.2.18}$$

从而

$$\mu(t)=\begin{cases}a\cos\sqrt{K_0}\,\|\gamma'\|t+b\sin\sqrt{K_0}\,\|\gamma'\|, & \text{若 } K_0>0,\\ a+bt, & \text{若 } K_0=0,\\ a\cos\sqrt{|K_0|}\,\|\gamma'\|t+b\sin\sqrt{|K_0|}\,\|\gamma'\|t, & \text{若 } K_0<0.\end{cases}$$

由此可见, 在非正常曲率空间中测地线上无共轭点. 在正常曲率空间中存在无限多个共轭点.

$$t=n\pi/\sqrt{K_0}\,\|\gamma'\|, \quad n=1, 2, \cdots.$$

于是, 若

$$L(\gamma[0, l]) = \|\gamma'\| < \pi/\sqrt{K_0}$$

则仍然不存在共轭点.

定理 4.2.9 设黎曼流形M具有非正截面曲率, 则 M 上不存在共轭点对.

证明 用反证法. 根据定理 4.2.8, 设 $\gamma: [0, 1] \to M$ 为测地线, 且存在非零 Jacobi 场 J, 使得$J(0) = J(1) = 0$, 则据(4.2.15)

$$\nabla_T \nabla_T J = R(T, J)T.$$

因为 M 具有非正截面曲率, 故

$$\langle \nabla_T \nabla_T J, J \rangle = \langle R(T, J)T, J \rangle = -K_{(J, T)} \langle J, J \rangle \geqslant 0,$$

这里 $K_{(J, T)}$表示 J、T 生成的二维子空间的截面曲率. 由此,

$$\frac{d}{dt}\langle \nabla_T J, J \rangle = \langle \nabla_T \nabla_T J, J \rangle + \langle \nabla_T J, \nabla_T J \rangle \geqslant 0,$$

即函数$\langle \nabla_T J, J \rangle$在$[0, 1]$上是非减的, 但因 $J(0) = J(1) = 0$, 故必须

$$\frac{d}{dt}\langle J, J \rangle = \langle \nabla_T J, J \rangle = 0, \quad t \in [0, 1].$$

从而$\|J\| =$ 常数. 仍因$J(0) = 0$, 故得

$$J(t) \equiv 0, \ t \in [0, 1].$$

这与假设不符. ∎

以往我们已证实: 对于测地线, 在小范围内它的长度为最小(定理 4.1.7). 很自然地进一步要问: 在怎样的条件下, 具有相同端点的曲线弧中, 测地线弧相对于邻近的曲线弧是最短的? 其回答粗糙地说是: 从一点 p 出发的测地线 γ, 相对于邻近曲线, 只到 p 关于 γ 的第一个共轭点时才是最短的. 这也给出了第一个共轭点的几何特征. 精确地, 我们有

定理 4.2.10(Jacobi) 设 $\gamma: [0, 1] \to M$, $\gamma(0) = p$ 为测地线弧, 且设 $\alpha: [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 为 γ 的保持端点固定的变分.

(i) 若 γ 上无共轭点，则存在正数 $\delta(<\varepsilon)$ 使得对于任何 $s\in(-\delta, \delta)$，有

$$L(s)\geqslant L(0),$$

这里 $L(s)$ 表示曲线弧 $\alpha_s:[0, 1]\to M$, $t\mapsto\alpha_s(t)=\alpha(t, s)$ 的长度，并且若 α_s 的轨迹与 γ 不相同，则 $L(s)>L(0)$.

(ii) 若 $\gamma(t_0)$, $t_0\in(0, 1)$ 为 $p=\gamma(0)$ 关于 γ 的共轭点，则存在正数 $\delta(\leqslant\varepsilon)$，使得对于任何 $s\in(-\delta, \delta)$，有

$$L(s)<L(0).$$

证明 我们把 (i) 的证明留待下节基本指标引理以后进行. 但在此指出，不含共轭点对的测地线 γ，相对于不在 γ 邻域中的曲线可能不为最短. 例如圆柱面上的螺旋线(测地线)就会出现这种情况.

今证 (ii). (ii) 叙述了下述事实：若测地线弧 γ 包含共轭点对，则在连接 γ 的两个端点且任意邻近 γ 的曲线弧中，总存在比 γ 的长度还要短的弧. 设 T 是正规测地线弧 $\gamma:[0, l]\to M$ 的切向量，对于满足 $\langle V, T\rangle=0$，保持端点不动，且在端点处 $\nabla_W V=0$ 的光滑变分，据(4.2.14)，有

$$I(V, W)=\int_0^l\{\langle\nabla_T V, \nabla_T W\rangle+\langle R(T, W)T, V\rangle\}dt. \tag{4.2.19}$$

设 V 是沿测地线弧 γ 的 Jacobi 场，将

$$\frac{d}{dt}\langle\nabla_T V, W\rangle=\langle\nabla_T\nabla_T V, W\rangle+\langle\nabla_T V, \nabla_T W\rangle,$$

代入(4.2.19)，则对于沿 γ 的正交 Jacobi 场 J，有

$$\begin{aligned}I(J, W)&=\int_0^l\frac{d}{dt}\langle\nabla_T J, W\rangle dt\\&=\langle\nabla_T J(l), W(l)\rangle-\langle\nabla_T J(0), W(0)\rangle.\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

设 $\gamma(t_0)$是 $p=\gamma(0)$关于 γ 的共轭点，由定理 4.2.8，存在沿γ

的Jacobi 场 J 使得

$$J(0)=J(t_0)=0.$$

故由命题 4.2.4 的证明知道

$$\langle J,\ T\rangle|_{\gamma(t)}=0.$$

此外，因为 $J(t_0)=0$，故 $\nabla_T J(t_0)\neq 0$，否则 $J(t)\equiv 0$，这与 J 沿 γ 非消失不符.

设 f: $[0,\ l]\to\boldsymbol{R}$ 为可微函数，它满足

$$f(0)=f(l)=0,\qquad f(t_0)=1. \tag{4.2.21}$$

设 Z 是沿 γ 的这样的平行向量场：

$$\nabla_T Z=0,\qquad Z(t_0)=-\nabla_T J(t_0). \tag{4.2.22}$$

对每一个实数 λ，定义沿 γ 的向量场如下：

$$Y_\lambda(t)=\begin{cases}J(t)+\lambda f(t)Z(t), & t\in[0,\ t_0],\\ \lambda f(t)Z(t), & t\in[t_0,\ l].\end{cases} \tag{4.2.23}$$

由 f 和 Z 的定义即知

$$Y_\lambda(0)=Y_\lambda(l)=0,\qquad \langle Y_\lambda,\ T\rangle=0.$$

故 Y_λ 可引出 γ 的一个正常(即保持 γ 的端点不动)，正交的分段光滑变分. 以下来计算

$$L''(0)=I(Y_\lambda,\ Y_\lambda).$$

首先计算由 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(t_0)$ 的测地线段. 以 $I_{t_0}(Y_\lambda,\ Y_\lambda)$ 表示(4.2.19)式中，令 $W=V=Y_\lambda$，且由 0 到 t_0 的积分为 $I_{t_0}(Y_\lambda,\ Y_\lambda)$. 由于 I 是双线性的，得到

$$I_{t_0}(Y_\lambda,\ Y_\lambda)=I_{t_0}(J,\ J)+2\lambda I_{t_0}(J,\ fZ)+\lambda^2 I_{t_0}(fZ,\ fZ).$$

由(4.2.20)—(4.2.23)，注意到 J 为 Jacobi 场，$J(0)=J(t_0)=0$，故

$$I_{t_0}(J,\ J)=0,$$

$$\begin{aligned}I_{t_0}(J,\ fZ)&=\langle\nabla_T J(t_0),\ f(t_0)Z(t_0)\rangle-\langle\nabla_T J(0),\ f(0)Z(0)\rangle\\&=\langle\nabla_T J(t_0),\ -\nabla_T J(t_0)\rangle=-\|\nabla_T J(t_0)\|^2.\end{aligned}$$

由于积分的可加性，故

$$I(Y_\lambda, Y_\lambda)=I_{t_0}(Y_\lambda, Y_\lambda)+\int_{t_0}^{l}\{\langle\nabla_T\lambda fZ, \nabla_T\lambda fZ\rangle$$
$$+\langle R(T, \lambda fZ)T, \lambda fZ\rangle\}dt=-2\lambda\|\nabla_T J(t_0)\|^2$$
$$+\lambda^2 I(fZ, fZ).$$

由此可见，对充分小的 λ，$I(Y_\lambda, Y_\lambda)<0$. 即对这些 λ，我们可得到一个正常、正交的分段光滑变分，使得 $L''(0)<0$，又因为 $L'(0)=0$，这意味着 $L(\lambda)<L(0)$. 即存在一个 δ，使得 $\lambda\in(-\delta, \delta)$ 时，变分曲线族中曲线段的长度 $L(\lambda)<L(0)$.

习　题

1. 证明：由(4.2.2)式定义的诱导联络 $\tilde\nabla$ 满足(4.2.3)和(4.2.4)式.

2. 设 $\gamma:[a, b]\to(M, g)$是正规测地线，V 是保持 γ 的端点为固定的变分向量场. 证明 γ 的弧长的第二变分公式可表成

$$\left.\frac{d^2L}{ds^2}\right|_{s=0}=\int_a^b\|\nabla_{\gamma'}\tilde V\|^2-R(\tilde V, \gamma', \tilde V, \gamma')dt$$
$$=-\int_a^b\{\langle\nabla_{\gamma'\gamma'}\tilde V+\langle R(\tilde V, \gamma')\gamma', \tilde V\rangle\}dt$$

其中
$$\tilde V=V-\langle V, \gamma'\rangle\gamma'.$$

3. 若对于曲线 $\gamma:[a, b]\to M$，其长度总是变分曲线之长的极小值，则称 γ 在 $\gamma(a)$和 $\gamma(b)$两点之间为相对最短. 证明：如果(M, g)是截面曲率非正的黎曼流形，则(M, g)上的测地线关于其上任何两点为相对最短.

4. 在单位球面 S^2 上，举例说明，测地线对于其上任意两点为相对最短这一结论未必成立.

5. 设 $\gamma:[a, b]\to M$，$s\mapsto\gamma(s)$是黎曼流形(M, g)的正规测地线. X、Y 为沿 γ 的 Jacobi 场. 证明：

(i) 若 $X=f(s)\gamma'(s)$，则 $f(s)=as+b$，a，b 为常数；

(ii) 若在 γ 的两个不同点上 X 与 γ' 正交，则

$$\langle X, \gamma'\rangle=0;$$

(iii) $\langle X, \nabla_{\gamma'}Y\rangle-\langle\nabla_\gamma X, \gamma\rangle=\text{Const}.$

6. 设 $\gamma:[0, l]\to(M, g)$为正规测地线，证明：

若 N 为沿 γ 平行的单位向量场，使 $\langle N(t_0), \gamma'(t_0)\rangle=0$，$V=f(t)N$ 为 γ 的端点保持固定的变分向量场，则

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0)=-\int_0^t f(f''+fR(\gamma', N, \gamma', N))dt.$$

7. 试证定理 4.2.8 的推论 1 和推论 2.

8. 设 p, q 是黎曼流形 M 的两个不同点，从 p 到 q 的曲线 $\sigma:[a, b]\to M$ 的能量定义为

$$E(\sigma)=\frac{1}{2}\int_a^b \|\sigma'(t)\|^2dt.$$

作光滑变分 $\alpha:[a, b]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to M$，使得 $\alpha_0(t)=\alpha(t, 0)=\sigma(t)$，$\alpha(a, s)=\sigma(a)=p$，$\alpha(b, s)=\sigma(b)=q$. 证明：关于上述变分 α，曲线 σ 是能量泛函 E 的临界点的充要条件是 σ 为测地线.

9. 设 $T_\gamma(\Omega)$ 表示沿测地线 $\gamma:[0, 1]\to M$ 为分段光滑、在 γ 的端点消失、且使 $\langle V, T\rangle=0$ 的向量场 V 所构成的向量空间. 试证：在 $T_\gamma(\Omega)$ 上指标形式 I 的零化度 ν 满足 $0\leqslant\nu\leqslant m-1$，这里 $m=\dim M$；并且以 m 维球面 S^m 上的对径点为例说明 ν 可以取到最大值 $(m-1)$.

§3* 曲率与拓扑

3.1 指标引理 Myers 定理

定理 4.3.1（基本指标引理） 设 γ 是 M 内由 p 到 q 的测地线，且在 γ 上 p 无共轭点，设 W 为 γ 上分段光滑向量场，V 为唯一的 Jacobi 场，使得

$$V(p)=W(p)=0, \quad V(q)=W(q),$$

则
$$I(V, V)\leqslant I(W, W),$$

且等式成立当且仅当 $W=V$.

证明 分三步进行.

1. 设 $\{v_i\}$ 为 $T_q(M)$ 的一个基，将 v_i 拓广为沿 γ 的一个 Jacobi 场 V_i，它满足 $V_i(p)=0$，$V_i(q)=v_i$，因为 p 在 γ 上无共轭点，故由定理 4.2.8 的推论 1，这是可能的且为唯一的. 此外，除去 p 点

外，Jacobi 场 $V_1, \cdots, V_m(m=\dim M)$是线性无关的．因为$V_i(p)=0$，可将 V_i 写成(参考(4.2.17))

$$V_i=tA_i,$$

这里 t 是 γ: $[0, 1]\to M$ 的参数，而 A_i 是 γ 上某个向量场．因为

$$\nabla_T V_i(p)=A_i(p),$$

故 $A_1, \cdots, A_m$ 同样是线性无关的． 且因此存在 m 个函数 $q_i(t)$，使得

$$W(t)=\sum_i q_i(t)A_i(t).$$

但因 $W(p)=0$，故存在沿 γ 分段光滑函数 f_i 使得

$$W=\sum_i f_i V_i,\ V=\sum_i f_i(1)V_i. \qquad (4.3.1)$$

2．因为 V, V_i, V_j 为 Jacobi 场，利用 Jacobi 方程，直接计算得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\langle\nabla_T V_i,\ V_j\rangle-\langle V_i,\ \nabla_T V_j\rangle)\\
&\quad=\langle\nabla_T\nabla_T V_i,\ V_j\rangle-\langle V_i,\ \nabla_T\nabla_T V_j\rangle\\
&\quad=\langle R(T,\ V_i)T,\ V_j\rangle\\
&\qquad-\langle R(T,\ V_j)T,\ V_i\rangle=0,
\end{aligned}$$

故有

$$\langle\nabla_T V_i,\ V_j\rangle-\langle V_i,\ \nabla_T V_j\rangle=c \quad (c\text{ 为常数}) \qquad (4.3.2)$$

又因 $V_i(0)=V_j(0)=0$，故上式中$c=0$. 因为$V(0)=0$，由(4.2.20)式即得

$$\begin{aligned}
I(V,\ V)&=\langle\nabla_T V(1),\ V(1)\rangle\\
&=\sum_{i,j}f_i(1)f_j(1)\langle\nabla_T V_i(1),\ V_j(1)\rangle. \qquad (4.3.3)
\end{aligned}$$

3．由(4.3.1)，

$$\nabla_T W=\sum_i f_i' V_i+\sum_i f_i\nabla_T V_i\equiv A+B,$$

于是

$$I(W, W)=\int_0^1 (\langle A, A\rangle+2\langle A, B\rangle+\langle B, B\rangle$$
$$+\langle R(T, W)T, W\rangle)dt, \qquad (4.3.4)$$

其中

$$\int_0^1 \langle B, B\rangle dt=\sum_{i,j}\int_0^1 f_i f_j \langle \nabla_T V_i, \nabla_T V_j\rangle dt$$
$$=\sum_{i,j}\int_0^1 f_i f_j \left(\frac{d}{dt}\langle \nabla_T V_i, V_j\rangle-\langle \nabla_T\nabla_T V_i, V_j\rangle\right)dt.$$

对第一项进行分部积分，对第二项使用 Jacobi 方程且利用(4.3.1)得

$$\int_0^1 \langle B, B\rangle dt=\sum_{i,j} f_i(1)f_j(1)\langle \nabla_T V_i(1), V_j(1)\rangle$$
$$-\int_0^1 \sum_{i,j}\{f_i' f_j\langle \nabla_T V_i, V_j\rangle+f_i f_j'\langle \nabla_T V_i, V_j\rangle\}dt$$
$$-\int_0^1 \langle R(T, V)T, V\rangle dt.$$

由(4.3.3)，上式右侧第一项为 $I(V, V)$. 由(4.3.2) 且其中 $c=0$，故第二项恰为 $2\int_0^1 \langle A, B\rangle dt$. 于是

$$\int_0^1 \langle B, B\rangle dt=I(V, V)-\int_0^1 (2\langle A, B\rangle+\langle R(T, V)T, V\rangle)dt$$

代入(4.3.4)，最终得

$$I(W, W)=I(V, V)+\int_0^1 \langle A, A\rangle dt\geqslant I(V, V),$$

等号仅当

$$A=\sum_i f_i' V_i=0, \quad 即 \quad f_i=f_i(1).$$

从而 $W=V$ 时成立. ▌

现在我们来证明定理 4.2.10 的(i). 设 γ 为测地线，点 $\gamma(t_0)$是 $\gamma(0)=p$ 点沿 γ 的第一个共轭点，则对于在 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(t^*)$，$t^*<t_0$ 消失的任何向量场 W，因为此时在这两点也消失的沿 $\gamma|_{[0,t^*]}$ 的

Jacobi 场 $V\equiv 0$, 故由基本指标引理, $I(W, W)>0$. 即对于保持 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(t^*)$ 不动的任何变分向量场 W 均有 $I(W, W)>0$. 又由于 $t^*(<t_0)$ 的任意性. 即证实了测地线段在具有相同端点的曲线中,在直到第一个共轭点的局部范围内,长度是最短的.

利用指标引理还可证明下列定理.

定理 4.3.2(Myers) 设 m 维黎曼流形 M 的 Ricci 曲率

$$\mathrm{Ric}(M)\geqslant(m-1)/r^2, \quad r=\mathrm{const}(>0),$$

则 M 上每一条长度大于 πr 的测地线都含有共轭点, 因而不是极小测地线.

证明 设 $\gamma:[0, 1]\to M$ 是长度为 L 的测地线, $\|\gamma'\|=L$, 设 $V_i(0)\in T_{\gamma(0)}(M)$ 使得

$$\langle V_i(0), V_j(0)\rangle=\delta_{ij}(i, j=1, \cdots, m), \text{ 且 } V_m(0)=\gamma'(0)/L,$$

将 $V_i(0)$ 沿 γ 作平行移动, 设得到的向量场为 $V_i(t)$. 故有

$$\langle V_i, V_j\rangle=\delta_{ij}, \quad \nabla_{\gamma'}V_i=0, \quad V_m=\gamma'/L.$$

再令

$$W_i(t)=V_i(t)\sin\pi t,$$

于是

$$I(W_i, W_i)=-\int_0^1\langle W_i, \nabla_{\gamma'}\nabla_{\gamma'}W_i-R(\gamma', W_i)\gamma'\rangle dt$$

$$=\int_0^1(\sin^2\pi t)[\pi^2-L^2R(V_m, V_i, V_m, V_i)]dt$$

对 i 从 1 到 $m-1$ 求和, 即得

$$\sum_{i=1}^{m-1}I(W_i, W_i)=\int_0^1(\sin^2\pi t)[(m-1)\pi^2-L^2S(V_m, V_m)]dt,$$

式中 $S(V_m, V_m)$ 为关于 V_m 的 Ricci 曲率. 由于 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant(m-1)/r^2$ 且 $L>\pi r$, 故

$$(m-1)\pi^2-L^2S(V_m, V_m)<0.$$

这就意味着

$$\sum_{i=1}^{m-1} I(W_i, W_i) < 0.$$

故必存在某一个 i, 使得 $I(W_i, W_i)<0$, 根据基本指标引理, γ 含有共轭点对, 由 Jacobi 定理 4.2.10, γ 不是极小测地线. ▌

因为当 M 是半径为 r 的 m 维球面时,其截面曲率为常数 $1/r^2$, 故 Ricci 曲率为常数 $(m-1)/r^2$. 由定理可知, 每条长度大于 πr 的测地线都含有共轭点对, 所以定理中的常数 $(m-1)/r^2$ 不能再增大.

推论 若 M 是完备的, 且 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant \frac{m-1}{r^2}$, 则 M 是紧致的, 其直径 $d \leqslant \pi r$, 且具有有限基本群.

证明 因为完备黎曼流形中的闭有界集是紧致的, 故据Myers 定理, M 自身是紧致的, 且其直径

$$d \leqslant \pi r.$$

令 $\pi: \tilde{M} \to M$ 是 M 的通用覆盖(参考本节 § 3.2), 于是 $\tilde{M}$ 和 M 一样是紧致的. 因此, 对每一点 $p \in M$, 集合 $\pi^{-1}(p)$ 必具有有限基数性质, 故 M 的基本群是有限的. ▌

由推论 1 直接得到

定理 4.3.3(Bonnet) 设 M 为完备黎曼流形, 若其截面曲率 K 有正的下界, 即

$$K \geqslant \delta > 0,$$

则 M 是紧致的, 且其直径 $d \leqslant \pi/\sqrt{\delta}$.

在结束本段之前, 我们不加证明地引述球面定理, 详细内容请参考文献[18].

定理 4.3.4(拓扑球面定理) 设 M 是 m 维完备单连通的黎曼流形, 它的截面曲率 K 满足

$$\frac{1}{4} < K \leqslant 1, \tag{4.3.5}$$

则 M 同胚于 m 维球面 S^m.

这个定理最早由 Rauch(1951 年)在 $\frac{3}{4}<K\leqslant 1$ 的假设下证得. 后来, Berger(1960 年)和 Klingenberg(1961 年)把它改进为上述的最佳形式. 如果曲率条件(4.3.5)改为

$$\frac{1}{4}\leqslant K\leqslant 1, \tag{4.3.6}$$

那末有:

(i) 当 M 的直径 $d_M>\pi$ 时, M 同胚于球面 S^m;

(ii) 当 M 的直径 $d_M=\pi$ 时, M 等距于紧致秩 1 对称空间(即或 S^m, 或复射影空间, 或四元射影空间, 或 Cayley 数射影空间).

后者被称为 Berger **最小直径定理**. 作为 Bonnet 定理(定理 4.3.3)的推广, Toponogov **最大直径定理**是: 若 M 为 m 维完备黎曼流形, 其截面曲率 $K\geqslant\delta>0$ 且直径 $d_M=\pi/\sqrt{\delta}$, 则 M 等距于半径为 $1/\sqrt{\delta}$ 的 m 维球面.

另一方面, 我们知道, 当 $m\leqslant 6$ 时, 同胚于 S^m 的微分流形必微分同胚于 S^m. 当 $m\geqslant 7$ 时, 有些流形与 S^m 同胚但不微分同胚. 因此, 在怎样的曲率条件下能保证微分同胚于球面呢?

定理 4.3.5(微分球面定理) 对于任何 m, 存在 δ_m,

$$\frac{1}{4}<\delta_m<1,$$

使得若 m 维完备单连通黎曼流形 M 的截面曲率 K 满足

$$\delta_m\leqslant K\leqslant 1, \tag{4.3.7}$$

则 M 微分同胚于球面 S^m. 这里 $\delta_m\to 0.68\,(m\to\infty)$.

(4.3.7)是下述更一般条件的规范化:

$$\delta c\leqslant K\leqslant c \quad (0<\delta\leqslant 1), \tag{4.3.8}$$

其中 $c>0$ 是常数. 截面曲率满足(4.3.8)的黎曼流形称为 δ 拚挤(δ-Pinching)流形.

最后说一说同伦球面问题. 一个 m 维紧致微分流形 M, 若它的同伦群, $\pi_i(M)=0$, $i=1, \cdots, m-1$, 则称 M 为 m 维同伦球面.

定理 4.3.6(同伦球面定理) 设 M 是 m 维完备单连通的黎曼流形, 它的截面曲率 $K\geqslant\delta>0$ 且直径 $d_M>\pi/2\sqrt{\delta}$, 则 M 是一个 m 维同伦球面.

3.2 非正曲率流形的 Hadamard 定理

我们已知道, 指数映射 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是局部微分同胚(定理 4.1.3). 自然要问, 在较大范围时情况如何? 即什么条件下, 指数映射是整体微分同胚. 为此, 先引进拓扑学上的有关结论.

定义 4.3.1 设 M 和 $\widetilde{M}$ 都是微分流形. 映射 $\pi: \widetilde{M}\to M$ 若满足下述条件:

(i) π 是连续映射, 且 $\pi(\widetilde{M})=M$;

(ii) 对每一点 $p\in M$, 存在 p 的一个邻域 U(称为 p 的特定邻域)使得

$$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{\alpha}\widetilde{U}_{\alpha},$$

其中 $\widetilde{U}_\alpha$ 是两两不相交的开集, 且 π 在每一个 $\widetilde{U}_\alpha$ 上的限制 $\pi|\widetilde{U}_\alpha$: $\widetilde{U}_\alpha\to U$ 为同胚, 则称 $\pi: \widetilde{M}\to M$ 为覆盖映射; $\widetilde{M}$ 是 M 的覆盖空间.

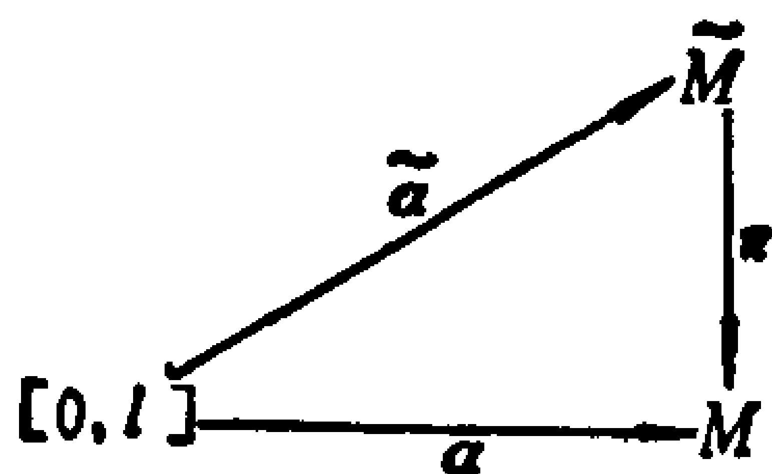
回想起, 连续映射 $\alpha: [0, l]\to M$ 称为 M 的(连接 $\alpha(0)$ 和 $\alpha(l)$ 的)一个弧.

定义 4.3.2 设 $\pi: \widetilde{M}\to M$ 为连续映射, $\alpha: [0, l]\to M$ 是 M 的一个弧, 若存在 $\widetilde{M}$ 的一个弧 $\tilde{\alpha}: [0, l]\to\widetilde{M}$, 使得

$$\pi\circ\tilde{\alpha}=\alpha,$$

即有

则称 $\tilde{\alpha}$ 为弧 α 的以 $\tilde{\alpha}(0)$ 为始点的提升, 如果 M 的每一条弧都是



可提升的，则称 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 具有提升弧性质.

以下叙述两个今后要用到的拓扑学上的结果. 写成

引理 1 设 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为覆盖映射，若 M 为弧连通且 $\widetilde{M}$ 为单连通，则 π 为同胚.

引理 2 设 $\pi:\ \widetilde{M}\to M$ 是具有提升弧性质的局部同胚. 若 $\widetilde{M}$ 为局部弧连通，且 M 为局部单连通，则 π 为覆盖映射.

现在可给出指数映射为整体微分同胚的一个充分条件，即有

定理 4.3.7 (Hadamard) 设 M 为截面曲率 $K\leqslant 0$ 的单连通完备黎曼流形，则 M 与欧氏空间微分同胚.

这个定理描述了 $K\leqslant 0$ 的完备单连通黎曼流形的拓扑结构. 我们分几步来证明它.

引理 3 设 M 为截面曲率 $K\leqslant 0$ 的完备黎曼流形，则 $\exp_p$: $T_p(M)\to M$ 是增加长度的，即若 $u,\ w\in T_p(M)$，则成立

$$\langle (d\exp_p)_u w,\quad (d\exp_p)_u w\rangle \geqslant \langle w,\ w\rangle,$$

这里，已作等同

$$T_u(T_p(M))=T_p(M).$$

证明 若 $u=0$ 则等号显然成立. 设 $u\neq 0$, γ: $[0,1]\to M$ 为测地线

$$\gamma(t)=\exp_p tu,\ t\in[0,\quad 1].$$

由命题 4.2.5 仅需对满足 $\langle w,u\rangle=0$ 的 w 加以证明. 由命题 4.2.5 的证明过程

$$J(t)=t(d\exp_p)_{tu}w,\quad t\in[0,1]$$

是 γ 上 Jacobi 场，且

$$J(0)=0, \quad \nabla_T J(0)=w, \quad \langle J(t), T(t)\rangle=0.$$

因为 $K\leqslant 0$，故

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle=2(\langle\nabla_T J, \nabla_T\nabla_T\nabla_T J\rangle+\langle\nabla_T\nabla_T J, \nabla_T\nabla_T J\rangle)$$
$$=2(\|\nabla_T\nabla_T J\|^2-K_{(T,\nabla_T J)}\|\nabla_T J\|^2)\geqslant 0,$$

式中 $K_{(T,\nabla_T J)}$ 表示由 T 和 $\nabla_T J$ 确定的二维子空间的截面曲率。由上式即知 $\frac{d}{dt}\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle$ 为单调上升函数，由于 $J(0)=0$，故有

$$0\leqslant\langle\nabla_T J, \nabla_T\nabla_T J\rangle(t)-\langle\nabla_T\nabla_T J, \nabla_T J\rangle(0)$$
$$=\langle\nabla_T J, \nabla_T\nabla_T J\rangle(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle, \quad t>0$$

由此即得

$$\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle\geqslant\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle(0)=\langle w, w\rangle>0, \quad t>0.$$

由上式及 $K\leqslant 0$，有

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle J, J\rangle=2(\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle+\langle J, \nabla_T\nabla_T J\rangle)$$
$$=2\langle\nabla_T J, \nabla_T J\rangle-2K_{(T,J)}\langle J, J\rangle\geqslant 2\langle w, w\rangle\equiv 2c.$$

积分上述不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\langle J, J\rangle\geqslant 2ct+\frac{d}{dt}\langle J, J\rangle|_{t=0}$$
$$=2ct+2\langle\nabla_T J, J\rangle(0)=2ct.$$

再积分之，得

$$\langle J, J\rangle\geqslant ct^2+\langle J, J\rangle(0)=ct^2, \quad t\in[0, 1].$$

令 $t=1$，即得

$$\langle(d\exp_p)_u w, (d\exp_p)_u w\rangle=\langle J(1), J(1)\rangle\geqslant c=\langle w, w\rangle. \quad \blacksquare$$

由证明过程易见

推论 设 $K\equiv 0$, 则 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是局部等距.

引理 4(Cartan-Hadamard) 设 M 为截面曲率 $K<0$ 的完备黎曼流形, 则指数映射 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是覆盖映射.

注: 我们又由流形的曲率条件得出有关的拓扑结论.

证明 因为 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是局部微分同胚, 故由引理 2, 只需再证明指数映射 $\exp_p$ 具有提升弧性质.

设 $\alpha: [0, 1]\to M$ 为 M 的一条弧, 由于 M 是完备的, 据 Hopf-Rinow 定理, 存在 $v\in T_p(M)$ 使得

$$\exp_p v=\alpha(0).$$

因为 $\exp_p$ 为局部微分同胚, 所以在 $T_p(M)$ 中存在 v 的一个邻域 V, 使得 $\exp_p$ 在 V 上的限制 $\exp_p|_V$ 是微分同胚, 利用其逆映射 $\exp_p^{-1}$, 可在 $v\in T_p(M)$ 的一个邻域内定义 $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha}=\exp_p^{-1}\circ\alpha,\ t\in[0, 1] \quad 且\ \alpha(t)\in\alpha([0, 1])\cap\exp_p(V).$$

设 A 是使得 α 在 $[0, t)$ 上有定义的 $t\in[0, 1]$ 的集合. A 非空. 且若 $\tilde{\alpha}$ 在 t_0 有定义, 则 $\tilde{\alpha}$ 在 t_0 的一个邻域内也有定义, 故 A 是 $[0, 1]$ 的开集. 若能证明 A 也为闭集, 则 $A=[0, 1]$, 即 α 整体可提升.

设 $t^*\in[0, 1]$ 为 A 的一个聚点, 即 $\{t_n\}\subset A$, $n=1, 2, \cdots, t_n\to t^*$. 今来证明 $t^*\in A$. 首先, 证明 $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ 有一个聚点, 假定 $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ 在 $T_p(M)$ 中没有聚点, 则对 $T_p(M)$ 中任给的一个中心在 $\tilde{\alpha}(0)$ 的闭球体 D, 存在一个 n_0, 使得 $\tilde{\alpha}(t_{n_0})\overline{\in}D$, 于是就得知从 $\tilde{\alpha}(0)$ 到 $\tilde{\alpha}(t_n)$ 的距离可以任意大, 又由引理 3, $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是增加向量的长度的. 因此可知 M 中从 $\alpha(0)$ 到 $\alpha(t_n)$ 的内蕴距离也可为任意大, 但这与从 $\alpha(0)$ 到

$$\alpha(t^*)=\lim_{n\to\infty}\alpha(t_n)$$

的内蕴距离为有限的事实矛盾. 故 $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ 有一个聚点, 设为 q.

今设 U 是 q 在 $T_p(M)$ 中的邻域，使得 $\exp_p$ 在 U 上的限制 $\exp_p|_U$ 是微分同胚. 由于 q 是 $\{\tilde{\alpha}(t_n)\}$ 的聚点。因此存在 n_1 使得 $\tilde{\alpha}(t_{n_1})\in U$. 因为 α 是连续的,存在开区间 $I\subset[0,1]$, $t^*\in I$ 使得 $\alpha(I)\subset\exp_p(U)$. 于是利用 $\exp_p|_U$ 的逆映射 $\exp_p^{-1}$ 可以定义 $\tilde{\alpha}$ 在 I 上以 $\alpha(t_{n_1})$ 为始点的提升. 由于 $\exp_p$ 是局部微分同胚, 这个提升与 $\tilde{\alpha}$ 在 $[0, t^*]\cap I$ 中重合, 因而是 $\tilde{\alpha}$ 到一个包含 t^* 的区间上的延拓, 因此集合 A 是闭集. ▌

应该指出，曲率条件 $K\leqslant 0$ 的作用在于保证 $\exp_p: T_p(M)\to M$ 是增加长度的局部微分同胚. 因此, 实际上已经证明了: 若 $\varphi:\tilde{M}\to M$ 是完备黎曼流形间增加长度的局部微分同胚, 则 φ 是覆盖映射.

现来证明 Hadamard 定理. 由引理4, $\exp_p: T_p(M)\to M$ 为覆盖映射. 再由引理 1, $\exp_p$ 为同胚，又因为 $\exp_p$ 是局部微分同胚, 故其逆映射是可微的，所以 $\exp_p$ 是微分同胚，M 与 R^m $(m=\dim M)$ 是微分同胚的. ▌

注: 有关曲率与拓扑的其他结果可参阅文献[17]的第 8 章及文献[18].

习　题

1. 设 M 是 m 维完备黎曼流形，对于任一固定点 $x_0\in M$，令 $U_{x_0}=\{X\in T_{x_0}(M)\mid \|X\|=1\}$，$R^+_\infty=R^+\cup\{\infty\}$；$\gamma_X$ 表示从 x_0 出发的初始向量为 $X\in U_{x_0}$ 的测地射线. 置

$$\tilde{S}(X)=\sup_t\{t\in R^+_\infty\mid \gamma_X(t)\ 为极小测地线\}$$

若 $\tilde{S}(X)<\infty$，则称点 $x_1=\gamma_X(\tilde{S})$ 为 x_0 沿 γ_X 的割点(cut point). 试证: x_1 是 x_0 沿 γ_X 的第一共轭点，或者 x_0 与 x_1 之间至少存在二条极小测地线.

2. 在习题 1 的同样假设下，考虑由 $\tilde{S}(X)$ 定义的映射 $\tilde{S}:U_{x_0}\to R^+_\infty$. 设 R^+_∞ 上的拓扑基取为一切开区间 (a, b) 以及 $(a, \infty]=(a, \infty)\cup\{\infty\}$. 试证映射 $\tilde{S}$ 是连续的.

3. 在习题1的同样假设下，集合

$$C(x_0)=\{\gamma_X(\tilde{S})\,|\,\tilde{S}(X)<\infty\}$$

称为 x_0 的割迹(cut locus)。令 $E_{x_0}=\{tX\,|\,0\leqslant t<\tilde{S}(X),\ X\in U_{x_0}\}$。试证：

(i) 指数映射 $\exp_{x_0}:E_{x_0}\to\exp_{x_0}(E_{x_0})\subset M$ 是微分同胚；

(ii) M 是 $\exp_{x_0}(E_{x_0})$ 和 $C(x_0)$ 的非连通之并。

［提示］ 以上三题可参考 Kobayashi & Nomizu, "Foundations of Diff Geom.", Vol. II, pp. 96—102.

4. 设 M 是 m 维完备黎曼流形，固定一点 $x_0\in M$，对于 M 上任一点 $x\notin C(x_0)$，存在唯一的连接 x_0 与 x 的极小测地线 $\gamma(t)$。用 $\gamma'(t)$ 和 $\mathrm{Ric}(\gamma')$ 分别表示 γ 的单位切向量和 M 沿 γ' 方向的 Ricci 曲率．定义

$$K(x)=\min_{0<s<\rho(x)}\left\{\frac{m-1}{\rho(x)-s}-\frac{1}{(\rho(x)-s)^2}\int_s^{\rho(x)}(t-s)^2\mathrm{Ric}(\gamma')dt,\right\}$$

其中 $\rho(x)=\rho(x_0, x)$ 是以 x_0 为起点的距离函数．试证：

$$\Delta\rho(x)\leqslant K(x).$$

由此，若 M 具有非负 Ricci 曲率，则

$$\Delta\rho(x)\leqslant(m-1)/\rho(x).$$

［提示］ 参考 S. T. Yau, "Harmonic functions on complete Riemannian manifolds", Comm. Pure Appl. Math., 28(1975), pp. 201—228.

5. 在习题1的同样假设下，$\delta_{x_0}=\inf\{\tilde{S}(X)\,|\,X\in U_{x_0}\}$ 称为点 x_0 的单射半径．流形 M 的单射半径 δ 定义为 $\delta=\inf\limits_{x_0\in M}\{\delta_{x_0}\}$．证明：若 M 紧致，则 $\delta>0$．

6. 设 M 是偶维数的定向黎曼流形，其截面曲率恒正．令 $\gamma:[a, b]\to M$ 是闭测地线(即 $\gamma(a)=\gamma(b)$，$\gamma'(a)=\gamma'(b)$)．那末，存在 γ 的一个变分 $\alpha:[a, b]\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to M$，使得一切曲线 $\alpha_s(t)=\alpha(t, s):[a, b]\to M\ (s\neq 0)$ 都是闭的，且它的长度小于 γ 的长度．(Synge 引理)

7. 设 M 是紧致、连通、定向的偶维数黎曼流形，且其截面曲率恒正，则 M 是单连通的(Synge 定理)．

［提示］ 6, 7 两题参考文献[17] Vol. 4, pp. 352—354.

§4* 比 较 定 理

4.1 Hessian 比较定理

设 (M, g) 是 m 维黎曼流形，其上黎曼联络为 ∇．

定义 4.4.1 设 f 是 M 上 C^2 函数，f 的二阶共变导数 $\nabla^2 f=\nabla df$ 称为 f 的 Hessian，记为 $\mathrm{Hes}(f)$.

由定义，对于任何 $X,\ Y\in\mathscr{X}(M)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hes}(f)(X,\ Y)&=\nabla df(X,\ Y)\\&=Y(Xf)-(\nabla_X Y)f.\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

根据黎曼联络的性质，$\mathrm{Hes}(f)$ 是一个 $(0,\ 2)$ 阶对称张量场，它在 M 的每点 p 诱导了 $T_p(M)$ 上的一个对称双线性泛函 $\mathrm{Hes}(f)(p)$: $T_p(M)\times T_p(M)\to\boldsymbol{R}$.

由(3.4.26)，f 的 Laplacian Δf 等于 $\mathrm{Hes}(f)$ 的迹，即

$$\Delta f=\mathrm{tr}(\mathrm{Hes}(f))=\mathrm{tr}(\nabla^2 f).\tag{4.4.2}$$

在 M 上若取关于一点 $p\in M$ 的法坐标系 (x^i)，则由定理4.1.4可知，(4.4.1)和(4.4.2)在 p 简化为

$$\mathrm{Hes}(f)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p),\ \frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p),\tag{4.4.3}$$

$$\Delta f(p)=\sum_i\frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}(p).$$

由此可见，$\mathrm{Hes}(f)(X,\ Y)$ 在点 p 的值，只依赖于向量 X, Y 在 p 的值，而与 X, Y 在 p 附近的性态无关.

现设 M 是完备的黎曼流形，$\langle,\rangle$ 表示黎曼内积. 在 M 上固定一点 O，对于 $p\in M$，$\rho(p)=\rho(O,\ p)$ 为 M 上从 O 起始的距离函数，它是流形上最自然的重要函数. 下面考虑距离函数的Hessian.

在指数映射 $\exp_O$ 有定义的 O 的邻域 $\exp_O(E_O)\subset M$ 内（参考本章§3，习题1—3），建立测地极坐标系 $(r,\ \theta^1,\ \cdots,\ \theta^{m-1})$，使 M 的度量 g 取(4.1.7)的形状，或写为

$$g=(\mathrm{d}r)^2+(f(r))^2 h_{ij}(r,\ \theta)d\theta^i d\theta^j\quad(1\leqslant i,\ j\leqslant m-1),\tag{4.4.4}$$

其中 $f(r)$ 是径向非负函数. 设 $p\in\exp_O(E_O)$ 不是 O 的割点，则唯一存在连接 O 和 p 的极小正规测地线 $\gamma(t)$，使 $\gamma(O)=O$，$\gamma(r)=$

p, 从而 $\rho(p)=r$.

命题 4.4.1 设 M、ρ、p、γ 如上所述，对于任何 $X\in T_p(M)$，我们有

$$\operatorname{Hes}(\rho)\left(X,\ \frac{\partial}{\partial r}(\rho)\right)=0,$$

其中 $\frac{\partial}{\partial r}$ 表示(4.4.4)的径向单位向量.

证明 由定义式(4.4.1)，

$$\operatorname{Hes}(\rho)\left(X,\ \frac{\partial}{\partial r}(p)\right)=\left\{X\left(\frac{\partial}{\partial r}\rho\right)-\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho\right\}_p,$$

其中 X 已在 p 附近拓展成向量场.

因为在(4.4.4)的坐标邻域内，$\rho=r$，故

$$\frac{\partial}{\partial r}\rho=1,\ 从而\ X\left(\frac{\partial}{\partial r}\rho\right)=0.$$

另一方面，$\operatorname{grad}\rho=\frac{\partial}{\partial r}$，$\left\langle\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=1$，故有

$$\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial r}\right)\rho=d\rho\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial r}\right)=\left\langle\operatorname{grad}\rho,\ \nabla_X\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle$$
$$=\left\langle\nabla_X\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=\frac{1}{2}X\left\langle\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=0.$$

这就证明了命题. ■

由于命题 4.4.1，当我们计算 $\operatorname{Hes}(\rho)(X,\ X)$时，可不必考虑 X 的径向分量.

现设 $X\in T_p(M)$满足$\left\langle X,\ \frac{\partial}{\partial r}(p)\right\rangle=0$. 由于 p 不是 O 的共轭点，我们可沿测地线 $\gamma(t)$ 构造唯一的 Jacobi 场 $\widetilde{X}(t)$，使得

$$\widetilde{X}(0)=0,\ \widetilde{X}(r)=X. \tag{4.4.5}$$

而且由于 $\widetilde{X}$ 可作为 M 上单参数测地线族的变分场(定理4.2.6)，因此沿 $\gamma(t)$处处有(参考(4.2.6)式的推导)

$$\left[\widetilde{X},\ \frac{\partial}{\partial r}\right]=0, \tag{4.4.6}$$

据 Jacobi 方程(4.2.15)，沿 $\gamma(t)$ 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \widetilde{X}', \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \widetilde{X}'', \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 0,$$

即
$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \widetilde{X}', \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \text{常数}.$$

既然 $\left\langle \widetilde{X}(0), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \widetilde{X}(p), \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = 0$，注意到沿 $\gamma(t)$，$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}$，可见沿 $\gamma(t)$ 处处有

$$\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 0. \tag{4.4.7}$$

这样，根据(4.4.1)，(4.4.7)和(4.4.6)，在点 p 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hes}(\rho)(X, X) &= \{\widetilde{X}(\widetilde{X}r) - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X})r\}_p \\
&= \left\{\widetilde{X}\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\right\}_p \\
&= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle_p = \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle_p.
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

由于 $\widetilde{X}$ 是 Jacobi 场，利用指标形式(4.2.13)，则上式可化为

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hes}(\rho)(X, X) &= \int_0^r \left\{\frac{d}{dt}\left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\right\rangle\right\}dt \\
&= \int_0^r \left\{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\|^2 + \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\right\rangle\right\}dt \\
&= \int_0^r \left\{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\|^2 + \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}\right\rangle\right\}dt \\
&= I(\widetilde{X}, \widetilde{X}).
\end{aligned} \tag{4.4.8'}$$

因此，我们有

命题 4.4.2 设 M, ρ, p, γ 如命题 4.4.1，$X \in T_p(M)$ 满足 $\left\langle X, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 0$，$\widetilde{X}(t)$ 是满足(4.4.5)和(4.4.6)的沿 $\gamma(t)$ 的 Jacobi 场，则(4.4.8′)成立.

为叙述方便起见，引入下列定义.

定义 4.4.2 设 M, O, p, γ 如上述，若在点 p 的 2 维平截面 $\pi_p \subset T_p(M)$ 包含径向向量 $\frac{\partial}{\partial r}(p)$，则称 π_p 为**径向平面**. M 上径向平面的截面曲率称为**径向曲率**.

定理 4.4.3 (Hessian 比较定理) 设 $M_k(k=1, 2)$是两个 m 维黎曼流形，γ_k: $[0, r] \to M_k$ 是以弧长为 t 为参数的测地线；$\gamma_k(r)$ 不是 $\gamma_k(0)$ 的割点，记 ρ_k 为 M_k 上从 $\gamma_k(0)$ 起始的距离函数，$k=1, 2$. 若

$$M_1 \text{ 沿 } \gamma_1 \text{ 的径向曲率} \geqslant M_2 \text{ 沿 } \gamma_2 \text{ 的径向曲率}, \tag{4.4.9}$$

则
$$\mathrm{Hes}(\rho_1)(X_1, X_1) \leqslant \mathrm{Hes}(\rho_2(X_2, X_2),$$

其中 $X_k \in T_{\gamma_k(r)}(M_k)$, $k=1, 2$, 使得

$$\left\langle X_1, \frac{\partial}{\partial r_1} \right\rangle_{M_1} = \left\langle X_2, \frac{\partial}{\partial r_2} \right\rangle_{M_2},$$

且 $\|X_1\| = \|X_2\|$.

证明 根据命题 4.4.1 以及对 X_k 的假设，不失一般性，可以认为 $\left\langle X_k, \frac{\partial}{\partial r_k} \right\rangle_{M_k} = 0$, 且 $\|X_k\| = 1$.

沿 $\gamma_k(t)$ 作平行的幺正向量场 $E_1^{(k)}(t)$, $\cdots$, $E_{m-1}^{(k)}(t)$, $E_m^{(k)}(t) = \frac{\partial}{\partial r_k}$, $k=1, 2$. 由(4.4.8′),

$$\mathrm{Hes}(\rho_k)(X_k, X_k) = \int_0^r \left\{ \|\nabla^{\mathfrak{p}}_{\partial t} \widetilde{X}_k\|^2 + \left\langle R^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}_k\right)\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}_k \right\rangle \right\} dt,$$

其中 $\widetilde{X}_k(t)$ 是沿 $\gamma_k(t)$ 的 Jacobi 场，使得 $\widetilde{X}_k(0) = 0$, $\widetilde{X}_k(r) = X_k$.

类似于(4.4.7), 沿 $\gamma_2(t)$ 处处有 $\left\langle \frac{\partial}{\partial r_2}, \widetilde{X}_2 \right\rangle = \langle E_m^{(2)}, \widetilde{X}_2 \rangle = 0$.

因此可写着

$$\widetilde{X}_2(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(t) E_i^{(2)}(t), \ \lambda_i(0) = 0. \tag{4.4.10}$$

因为在点 $\gamma_1(r)$, $E_i^{(1)}(r)(i=1, \cdots, m-1)$ 可以任意选择(然后沿 γ_1 平行移动)，故不妨认为

$$X_1=\tilde{X}_1(r)=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i(r)E_i^{(1)}(r). \tag{4.4.11}$$

沿 γ_1 构造向量场

$$Z(t)=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i(t)E_i^{(1)}(t),$$

则由(4.4.10)和(4.4.11)可见

$$Z(0)=0,\quad Z(r)=X_1=\tilde{X}_1(r), \tag{4.4.12}$$

$$\|Z\|^2=\sum_{i=1}^{m-1}(\lambda_i(t))^2=\|\tilde{X}_2\|^2, \tag{4.4.13}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Z\|^2&=\left\|\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'(t)E_i^{(1)}(t)\right\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i'(t)E_i^{(2)}(t)\right\|^2\\&=\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_2\|^2.\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

据(4.4.12)，应用基本指标引理(定理 4.3.1)，对于 γ_1 有

$$I^{(1)}(\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_1)\leqslant I^{(1)}(Z,\ Z).$$

由此，利用(4.4.9)，(4.4.13)，(4.4.14)和命题 4.4.2，我们就有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hes}(\rho_1)(X_1,\ X_1)=I^{(1)}(\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_1)\leqslant I^{(1)}(Z,\ Z)\\&=\int_0^r\left\{\left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Z\right\|^2-\left\langle R^{(1)}\left(Z,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\ Z\right\rangle\right\}_{\gamma_1}dt\\&\leqslant\int_0^r\left\{\left\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}_2\right\|^2-\left\langle R^{(2)}\left(\tilde{X}_2,\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\ \tilde{X}_2\right\rangle\right\}_{\gamma_2}dt\\&=I^{(2)}(\tilde{X}_2,\ \tilde{X}_2)=\mathrm{Hes}(\rho_2)(X_2,\ X_2).\ ▌\end{aligned}$$

推论 在定理 4.4.3 的同样假设下，若 φ: $[0,\ +\infty)\to\boldsymbol{R}$ 是非减函数，则

$$\mathrm{Hes}(\varphi(\rho_1))(X_1,\ X_1)\leqslant\mathrm{Hes}(\varphi(\rho_2))(X_2,\ X_2).$$

证明 由复合函数求导法则，

$$\begin{aligned}\mathrm{Hes}(\varphi(\rho))(X,\ Y)=&\varphi''\cdot(X\rho)(Y\rho)\\&+\varphi'\cdot\mathrm{Hes}(\rho)(X,\ Y).\end{aligned}$$

注意到 $\varphi'\geqslant 0$ 及 $X\rho=\left\langle X, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle$, 故只需证明

$$\mathrm{Hes}(\varphi(\rho_1))\left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \frac{\partial}{\partial r_1}\right)\leqslant \mathrm{Hes}(\varphi(\rho_2))\left(\frac{\partial}{\partial r_2}, \frac{\partial}{\partial r_2}\right)$$

和
$$\mathrm{Hes}(\varphi(\rho_1))(X_1, X_1)\leqslant \mathrm{Hes}(\varphi(\rho_2))(X_2, X_2),$$

其中
$$\left\langle X_k, \frac{\partial}{\partial r_k}\right\rangle=0 \quad (k=1, 2).$$

因为
$$\mathrm{Hes}(\varphi(\rho))\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)=\varphi'',$$

且对于 $\left\langle X, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=0$ 有

$$\mathrm{Hes}(\varphi(\rho))(X, X)=\varphi'\cdot \mathrm{Hes}(\rho)(X, X),$$

所以由定理 4.4.3 立即得证.

4.2 Laplacian 比较定理

在具体应用中，比较定理主要用来与常数截面曲率的空间形式相比较，以得到某种估计. 为此，我们先考虑空间形式中距离函数的 Hessian.

设 $\overline{M}(K_0)$ 是常曲率 K_0 的 m 维空间形式，其度量为 g. 在一点 $O\in\overline{M}(K_0)$ 的测地极坐标系 $(r, \theta^1, \cdots, \theta^{m-1})$ 下，g 取如下形状(参考本章§1, 习题 9)

$$g=(dr)^2+(f(r))^2d\sigma^2, \tag{4.4.15}$$

其中
$$d\sigma^2=h_{ij}(\theta)d\theta^id\theta^j \quad (1\leqslant i, j\leqslant m-1)$$

是 $m-1$ 维标准单位球面的度量，径向函数 $f(r)$ 满足下列方程

$$\begin{cases}f''+K_0f=0,\\ f(0)=0, f'(0)=1,\end{cases} \tag{4.4.16}$$

即

$$f(r)=\begin{cases}\sin(\sqrt{K_0}\,r)/\sqrt{K_0}, & \text{当 } K_0>0,\ r<\pi/\sqrt{K_0};\\ r, & \text{当 } K_0=0;\\ \operatorname{sh}(\sqrt{-K_0}\,r)/\sqrt{-K_0}, & \text{当 } K_0<0.\end{cases} \tag{4.4.17}$$

用 ρ 表示 $\overline{M}(K_0)$ 上从 O 起始的距离函数，设 $p\in\overline{M}(K_0)$ 不是 O 的共轭点，$\rho(p)=r$，$X\in T_p(\overline{M})$ 且 $\left\langle X,\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=0$. 据 (4.4.8)，为了计算 $\mathrm{Hes}(\rho)(X,\ X)$，只要求出满足 (4.4.5) 的 Jacobi 场 $\widetilde{X}$.

设 $\gamma(t):[0,r]\to\overline{M}(K_0)$ 是连接 O 与 p 的极小正规测地线，从而 $\|\gamma'\|=\left\|\frac{\partial}{\partial t}\right\|=1$. 根据(4.2.18)，沿 γ 的 Jacobi 场 $\widetilde{X}(t)$ 具有如下形状

$$\widetilde{X}(t)=\mu(t)A(t),$$

其中向量场 $A(t)$ 满足

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}A=0,\quad \left\langle A,\ \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle=0,\quad A(r)=X,$$

而函数 $\mu(t)$ 满足

$$\begin{cases}\mu''+K_0\mu=0,\\ \mu(0)=0,\ \mu(r)=1.\end{cases} \tag{4.4.18}$$

由 Jacobi 场的唯一性，比较(4.4.16)与(4.4.18)，可见

$$\mu(t)=f(t)/f(r). \tag{4.4.18'}$$

因此，

$$\widetilde{X}(t)=\frac{f(t)}{f(r)}A(t).$$

把它代入(4.4.8)的类似式，便得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hes}(\rho)(X,\ X)&=\langle\widetilde{X},\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle_p\underline{\underline{\gamma}}\langle\widetilde{X},\ \widetilde{X}'\rangle_p\\ &=\left\langle A(r),\ \frac{f'(r)}{f(r)}A(r)\right\rangle\\ &=\frac{f'(r)}{f(r)}g(X,\ X),\quad \forall\left\langle X,\ \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle=0.\end{aligned}$$

上式最后的内积实际上是(4.4.15)中关于径向 $\frac{\partial}{\partial r}$ 的正交分量部分，再结合命题 4.4.1，注意到一般情况下 $r=\rho$，故有

$$\operatorname{Hes}(\rho)=\frac{f'(\rho)}{f(\rho)}(g-d\rho\otimes d\rho). \tag{4.4.19}$$

命题 4.4.4 设 $\overline{M}(K_0)$ 为常曲率 K_0 的 m 维空间形式，其黎曼度量为 g，则 $\overline{M}(K_0)$ 上距离函数 ρ 的Hessian 可表达为(4.4.19)，其中函数 f 由(4.4.17)定义.

由上述，利用 Hessian 比较定理 4.4.3，我们可建立下列定理.

定理 4.4.5(Laplacian 比较定理) 设 M_1 是 m 维完备黎曼流形，$\gamma_1:[0, r]\to M_1$ 是正规测地线，使 $\gamma_1(r)$ 不是 $\gamma_1(0)$ 的共轭点，记 ρ_1 为 M_1 上从 $\gamma_1(0)$ 起始的距离函数. 若 M_1 沿 γ_1 的径向 Ricci 曲率 $\operatorname{Ric}^{M_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\geqslant(m-1)K_0$，且当 $K_0>0$ 时 $r<\pi/\sqrt{K_0}$，则

$$(\Delta\rho_1)(\gamma_1(r))\leqslant(m-1)\frac{f'(r)}{f(r)}, \tag{4.4.20}$$

其中 f 由(4.4.17)定义.

证明 考虑常曲率 K_0 的 m 维空间形式 $M_2(K_0)$，$\gamma_2:[0, r]\to M_2(K_0)$ 是正规测地线，记 ρ_2 为 $M_2(K_0)$ 上从 $\gamma_2(0)$ 起始的距离函数. 据定理 4.2.9 以及当 $K_0>0$ 时，$r<\pi/\sqrt{K_0}$，可知 $\gamma_2(r)$ 不是 $\gamma_1(0)$ 的共轭点.

仿定理 4.4.3 的证明，在 $M_k(k=1, 2)$ 中分别沿 γ_k 作平行的幺正标架场 $\left\{E_1^{(k)}, \cdots, E_{m-1}^{(k)}, E_m^{(k)}=\frac{\partial}{\partial t}\right\}$. 以每个 $E_i^{(k)}(r)$ 作为 X_k，沿 γ_k 构造 Jacobi 场 $\widetilde{E}_i^{(k)}$，使 $\widetilde{E}_i^{(k)}(0)=0$，$\widetilde{E}_i^{(k)}(r)=E_i^{(k)}(r)$，$i=1, \cdots, m-1$. 于是，我们有

$$\text{Hes}(\rho_k)(E_i^{(k)}, E_i^{(k)})$$

$$=\int_0^r \left\{ \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \widetilde{E}_i^{(k)}\|^2 - \left\langle R^{(k)}\left(\widetilde{E}_i^{(k)}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{E}_i^{(k)}\right\rangle\right\} dt$$

$$(i=1, \cdots, m-1; k=1, 2)$$

和

$$(\Delta\rho_k)(\gamma_k(r)) = (\text{tr Hes}(\rho_k))(\gamma_k(r)) = \int_0^r \left\{\sum_{i=1}^{m-1} \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \widetilde{E}_i^{(k)}\|^2 - \sum_{i=1}^{m-1}\left\langle R^{(k)}\left(\widetilde{E}_i^{(k)}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{E}_i^{(k)}\right\rangle\right\} dt.$$

因为 $M_2(K_0)$ 是空间形式，据前面所述，Jacobi 场 $\widetilde{E}_i^{(2)}$ 必具有如下形状：

$$\widetilde{E}_i^{(2)}(t) = \mu(t) E_i^{(2)}(t),$$

其中 $\mu(t)$ 满足(4.4.18).

因此，

$$(\Delta\rho_2)(\gamma_2(r)) = \int_0^r \left\{(m-1)(\mu'(t))^2 - \mu^2(t)\sum_{i=1}^{m-1}\left\langle R^{(2)}\left(E_i^{(2)}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, E_i^{(2)}\right\rangle\right\} dt$$

$$=(m-1)\int_0^r \{(\mu'(t))^2 - K_0\mu^2(t)\} dt.$$

现在仿照定理 4.4.3 的证明中向量场 $Z(t)$ 的构造，我们沿 γ_1 作 $m-1$ 个相互正交的向量场，

$$Z_i(t) = \mu(t) E_i^{(1)}, \quad \|Z_i\|^2 = \|\widetilde{E}_i^{(2)}\|^2 = \mu^2(t),$$

$$\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z_i\|^2 = (\mu'(t))^2 \quad (i=1, \cdots, m-1).$$

这样，由基本指标引理及定理条件，就有

$$
\begin{aligned}
&(\Delta\rho_1)(\gamma_1(r))\\
&=\int_0^r\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{E}_i^{(1)}\|-\sum_{i=1}^{m-1}\left\langle R^{(1)}\left(\widetilde{E}_i^{(1)},\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\ \widetilde{E}_i^{(1)}\right\rangle\right\}_{\gamma_1}dt\\
&\leqslant\int_0^r\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}Z_i\|-\sum_{i=1}^{m-1}\left\langle R^{(1)}\left(Z_i,\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\ Z_i\right\rangle\right\}_{\gamma_1}dt\\
&=\int_0^r\left\{(m-1)(\mu'(t))^2-\mu^2(t)\operatorname{Ric}^{M_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right\}_{\gamma_1}dt\\
&\leqslant(m-1)\int_0^r\{(\mu'(t))^2-K_0\mu^2(t)\}_{\gamma_2}dt\\
&=(\Delta\rho_2)(\gamma_2(r)).
\end{aligned}
\tag{4.4.21}
$$

另一方面，从(4.4.19)得

$$
\begin{aligned}
(\Delta\rho_2)(\gamma_2(r))&=(\operatorname{tr}\operatorname{Hes}(\rho_2))(\gamma_2(r))\\
&=\sum_{i=1}^{m-1}\operatorname{Hes}(\rho_2)(E_i^{(2)}(r),\ E_i^{(2)}(r))\\
&=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{f'(r)}{f(r)}g(E_i^{(2)}(r),\ E_i^{(2)}(r))\\
&=(m-1)\frac{f'(r)}{f(r)}.
\end{aligned}
$$

把它代入(4.4.21)即得(4.4.20). ∎

注意到对复合函 $\varphi(\rho)$, 有 $\Delta\varphi(\rho)=\varphi''+\varphi'\Delta\rho$, 故得

推论1 在定理 4.4.5 的同样假设下，若 $\varphi:[0,\ +\infty)\to\boldsymbol{R}$ 是非减函数，则

$$
(\Delta\varphi(\rho_1))(\gamma_1(r))\leqslant\varphi''(r)+(m-1)\varphi'(r)\frac{f'(r)}{f(r)}. \tag{4.4.22}
$$

推论2 设 M 是 m 维完备黎曼流形，它的 Ricci 曲率 $\geqslant-(m-1)k$ $(k\geqslant0)$, 则在距离函数 ρ 的可微点有

$$
\Delta\rho\leqslant\frac{m-1}{\rho}(1+k\rho). \tag{4.4.23}
$$

证明 据定理 4.4.5 和式(4.4.17),

$$
\Delta\rho\leqslant(m-1)k\frac{\operatorname{ch}(k\rho)}{\operatorname{sh}(k\rho)}. \tag{4.4.24}
$$

对于 $x>0$, 考虑函数 $F(x)=(1+x)\operatorname{sh}x-x\operatorname{ch}x$, 易见 $F(0)=0$,

$$F'(x)=\operatorname{sh}x+x(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)\geqslant 0.$$

因此，$F(x)\geqslant 0$，即

$$\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\leqslant\frac{1+x}{x}.$$

将此不等式应用于(4.4.24)，即得(4.4.23). ∎

4.3 体积比较定理

体积是几何学的基本概念之一. 如何计算黎曼流形上某个紧致区域的体积自然是关注的一个问题. 最简单的情况是计算 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中标准单位球体 B^m 的体积 $b_m=\mathrm{Vol}(B^m)$.

设 $(x_1,\cdots,x_m)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的直角坐标，它的球坐标 $(t,\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})$ 定义为

$$\begin{cases} x_1=t\cos\theta_1, \\ x_2=t\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1}=t\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} \\ x_m=t\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1}. \end{cases}$$

因此，

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m=t^{m-1}dt\wedge dS_{m-1},$$

其中 dS_{m-1} 是 $m-1$ 维单位标准球面 $S^{m-1}=\partial B^m$ 的体积元. 利用球坐标系，我们可算得

$$b_m=\int_0^1 t^{m-1}dt\left\{\int_{S^{m-1}}dS_{m-1}\right\}=c_{m-1}\int_0^1 t^{m-1}dt=\frac{1}{m}c_{m-1}, \tag{4.4.25}$$

其中 c_{m-1} 是 S^{m-1} 的 $m-1$ 维体积. 这样，为了计算 b_m，只要计算 c_{m-1}.

如所知，对于 $x>0$，Gamma 函数 $\Gamma(x)$ 定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

它有性质：

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$
$$\Gamma(m+1)=m!,$$
$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^m dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).$$

于是，利用 R^m 的球坐标系，注意到 $\sum_{i=1}^m x_i^2=t^2$，我们有

$$\left\{\int_R e^{-t^2}dt\right\}^m=\int_{R^m}e^{-\sum_{i=1}^m x_i^2}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m$$
$$=\int_0^\infty e^{-t^2}t^{m-1}dt\left\{\int_{S^{m-1}}dS_{m-1}\right\}$$
$$=c_{m-1}\int_0^\infty t^{m-1}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}c_{m-1}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).$$

当 $m=2$ 时，$c_1=2\pi$，故

$$\int_R e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

由上两式便得

$$c_{m-1}=2\pi^{m/2}/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\tag{4.4.26}$$

从而

$$b_m=\frac{2}{m}\pi^{m/2}/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).$$

对于一般黎曼流形，计算其测地球的体积是十分困难的。我们希望能给出某种估计。

定义 4.4.3 设 (M, g) 是 m 维完备黎曼流形，对任一点 $O\in M$，记 ρ 为从 O 起始的距离函数。M 上以 O 为中心，r 为半径的测地球 $B_O(r)$ 定义为

$$B_O(r)=\{p\in M\,|\,\rho(p)\leqslant r\}.$$

在不引起混淆时，也简记为 $B(r)$.

如果 $B_O(r)$ 位于 O 的割迹之内，则通过指数映射 $\exp_O: T_O(M) \to M$，可使 $B_O(r)$ 与看作欧氏空间的 $T_O(M)$ 中半径为 r 的球 B^m 相对应. 因此，只要知道指数映射 $\exp_O$ 的 Jacobi 行列式，就可计算 $B_O(r)$ 的体积.

对于任一 $u \in T_O(M)$，在 O 的割迹内取从 O 出发的测地射线 $\gamma(t) = \exp_O(tu)$. 设 $\{e_1, \cdots, e_{m-1}, e_m = u\}$ 是 $T_O(M)$ 的一个基，作出 $T_{tu}(T_O(M))$ 与 $T_O(M)$ 的自然等同，则 $(d\exp_O)_{tu} e_i \in T_{\gamma(t)}(M)$，$i=1, \cdots, m-1$. 由命题 4.2.5，$\{(d\exp_O)_{tu} e_1, \cdots, (d\exp_O)_{tu} e_{m-1}, (d\exp_O)_{tu} e_m = \gamma'(t)\}$ 构成 $T_{\gamma(t)}(M)$ 的一个基. 于是，指数映射 $\exp_O$ 在 tu 的 Jacobi 行列式是

$$J\exp_O(tu) = \|(d\exp_O e_1) \wedge \cdots \wedge (d\exp_O e_m)\| / \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_m\|, \tag{4.4.27}$$

其中 $$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_m\| \xlongequal{(\text{def.})} \det(\langle e_i, e_j \rangle)_{1 < i, j < m}.$$

设 $(r, \theta^1, \cdots, \theta^{m-1})$ 是 M 上关于点 O 的测地极坐标系，$p \in M$ 不是 O 的共轭点，则唯一存在从 O 出发的正规测地射线 $\gamma(t): [0, r] \to M$，使 $\gamma(0) = O$，$\gamma(r) = p$. 在 $T_O(M)$ 中取幺正基 $\{E_1, \cdots, E_{m-1}, E_m = \gamma'(0)\}$，把它们拓展成沿 $\gamma(t)$ 的平行场 $\{E_1(t), \cdots, E_{m-1}(t), E_m(t) = \gamma'(t)\}$. 仿证明定理 4.4.5 那样，沿 $\gamma(t)$ 构造 $m-1$ 个 Jacobi 场 $\widetilde{E}_i(t)$，使 $\widetilde{E}_i(0) = 0$，$\widetilde{E}_i(r) = E_i(r)$，$i=1, \cdots, m-1$. 于是，作为单参数测地线族变分场的 $\widetilde{E}_i(t)$（参考(4.2.17)式）我们有

$$\widetilde{E}_i(t) = (d\exp_O)_{tE_m}(te_i), \quad i=1, \cdots, m-1. \tag{4.4.28}$$

其中 $e_i \in T_{rE_m}(T_O(M)) \cong T_O(M)$ 由下式完全确定：

$$(d\exp_O)_{rE_m}(re_i) = E_i(r), \quad i=1, \cdots, m-1.$$

令 $e_m = E_m = \gamma'(0)$，则

$$(d\exp_O)_{tE_m} e_m = \gamma'(t).$$

据命题 4.2.5, 向量场$\{\widetilde{E}_1(t), \cdots, \widetilde{E}_{m-1}(t), \gamma'(t)\}$沿$\gamma(t)$处处互相正交, $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}$是$T_O(M)$的一个正交基. 于是, 由(4.4.27)和(4.4.28), 指数映射 $\exp_O$ 在 tE_m 的 Jacobi 行列式 $J\exp_O(tE_m) = J(t, \theta)$ (这里$\theta=(\theta^1, \cdots, \theta^{m-1})$是 $E_m=\gamma'(0)$ 的球面坐标)为

$$J(t, \theta)=\|\widetilde{E}_1(t)\wedge\cdots\wedge\widetilde{E}_{m-1}(t)\wedge\gamma'(t)\|/\|(t\varepsilon_1)\wedge\cdots\wedge(t\varepsilon_{m-1})\wedge\gamma'(0)\|$$

$$=\|\widetilde{E}_1(t)\wedge\cdots\wedge\widetilde{E}_{m-1}(t)\|/t^{(m-1)}\|\varepsilon_1\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{m-1}\|.$$

令 dv_M 和 dv_{R^m} 分别表示 M 和 $T_O(M)\cong R^m$ 的体积元 (m 次形式), 则在指数映射 $\exp_O$ 下, 有

$$(d\exp_O)(dv_M)=A(t, \theta)dv_{R^m}=A(t,\theta)\cdot t^{m-1}dt\wedge dS_{m-1}, \tag{4.4.29}$$

其中

$$A(t, \theta)=\sqrt{J(t, \theta)}=\varepsilon t^{1-m}\|\widetilde{E}_1(t)\wedge\cdots\wedge\widetilde{E}_{m-1}(t)\|^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4.30}$$

这里常数 $\varepsilon=\|\varepsilon_1\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{m-1}\|^{-\frac{1}{2}}$.

特别, 在点 $p(t=r)$, $\widetilde{E}_i(r)=E_i(r)$, $i=1, \cdots, m-1$, 故

$$A(r, \theta)=\varepsilon r^{1-m}=A(r). \tag{4.4.30'}$$

由(4.4.30)及$\widetilde{E}_i(t)$的性质, 我们得

$$\frac{\partial}{\partial t}A(t, \theta)=\frac{\varepsilon}{2}t^{1-m}\|\widetilde{E}_1(t)\wedge\cdots\wedge\widetilde{E}_{m-1}(t)\|^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\{\det(\langle\widetilde{E}_i(t), \widetilde{E}_j(t)\rangle)\}-\varepsilon(m-1)t^{-m}\|\widetilde{E}_1(t)\wedge\cdots\wedge\widetilde{E}_{m-1}(t)\|=A(t,\theta)\left\{\sum_{i=1}^{m-1}\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{E}_i(t), \widetilde{E}_i(t)\rangle/\|\widetilde{E}_i(t)\|^2-(m-1)/t\right\}.$$

特别, 当 $t=r$ 时, $\|\widetilde{E}_i(r)\|^2=\|E_i(r)\|^2=1$, 故有

$$\frac{A'(r)}{A(r)}=\sum_{i=1}^{m-1}\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{E}_i(r), \widetilde{E}_i(r)\rangle-\frac{m-1}{r}. \tag{4.4.31}$$

由此可建立下列定理.

定理4.4.6(Bishop(i), Günther(ii)) 设 M 是 m 维完备黎曼流形，在一点 $O\in M$ 的割迹内建立测地极坐标(r,θ).

(i) 若 M 的 Ricci 曲率$\geqslant(m-1)K_0$，则

$$\frac{A(r,\theta)}{[f(r)/r]^{m-1}}\downarrow, \tag{4.4.32}$$

即它是 r 的非增函数.

(ii) 若 M 的截面曲率$\leqslant K_0$，则

$$\frac{A(r,\theta)}{[f(r)/r]^{m-1}}\uparrow, \tag{4.4.33}$$

即它是 r 的非减函数. 这里$f(r)$由(4.4.17)定义.

证明 对任意确定的 r，由(4.4.8)知

$$\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{E}_i(r),\ \widetilde{E}_i(r)\rangle=\mathrm{Hes}(\rho)(E_i(r),\ E_i(r)),$$

$$i=1,\ \cdots,\ m-1.$$

代入(4.4.31)得

$$\frac{A'(r)}{A(r)}=\sum_{i=1}^{m-1}\mathrm{Hes}(\rho)(E_i(r),\ E_i(r))-\frac{m-1}{r}. \tag{4.4.34}$$

(i) 若 $\mathrm{Ric}(M)\geqslant(m-1)K_0$，应用Laplacian 比较定理4.4.5，从(4.4.34)得

$$\frac{A'(r)}{A(r)}=(\Delta\rho)(\gamma(r))-\frac{m-1}{r}\leqslant(m-1)\left[\frac{f'(r)}{f(r)}-\frac{1}{r}\right],$$

即

$$\frac{A'(r)}{A(r)}\leqslant(m-1)\frac{[f(r)/r]'}{[f(r)/r]}. \tag{4.4.35}$$

由于 r 的任意性，对于任何 $r_1<r_2$(在点 O 的割迹之内)，将(4.4.35)两边从 r_1 积分到 r_2，即得

$$\frac{A(r_2)}{[f(r_2)/r_2]^{m-1}}\leqslant\frac{A(r_1)}{[f(r_1)/r_1]^{m-1}}.$$

由于 $r_1<r_2$ 的任意性，(4.4.32)得证.

(ii) 若 M 的截面曲率$\leqslant K_0$，应用 Hessian 比较定理4.4.3

及命题 4.4.4, 则从(4.4.34)可得

$$\frac{A'(r)}{A(r)} \geqslant \frac{f'(r)}{f(r)} \sum_{i=1}^{m-1} \langle E_i(r),\ E_i(r) \rangle - \frac{m-1}{r}$$

$$= (m-1) \frac{[f(r)/r]'}{[f(r)/r]}.$$

余下就和(i)的情况同样证明. ∎

注意, $[f(r)/r]^{m-1} dv_{R^m} = [f(r)]^{m-1} dr \wedge dS_{m-1}$ 是常曲率 K_0 的空间形式在测地极坐标系下的体积元, 其中 dS_{m-1} 表示 $m-1$ 维标准单位球面上的体积元(见习题 7).

作为上述定理的直接结果, 就有

定理 4.4.7(体积比较定理) 设 M 是 m 维完备黎曼流形, $B_O(r)$ 是 M 上以 $O \in M$ 为中心, 半径为 r 的测地球, 它位于 O 的割迹之内. 用 $V(K_0; r)$ 表示常曲率 K_0 的空间形式中半径为 r(当 $K_0>0$ 时, $r<\pi/\sqrt{K_0}$)的测地球的体积. 那末,

(i) 若 $\mathrm{Ric}(M) \geqslant (m-1)K_0$, 则 $\mathrm{Vol}(B_O(r)) \leqslant V(K_0; r)$.

(ii) 若 M 的截面曲率 $\leqslant K_0$, 则 $\mathrm{Vol}(B_O(r)) \geqslant V(K_0; r)$.

证明 关于 O 建立测地极坐标系 (r, θ), 其中 θ 是 $m-1$ 维单位球面的坐标, 其上体积元记为 $d\theta$. 以 $S^{m-1}(t)$ 表示 R^m 中半径为 t 的 $m-1$ 维球面.

(i) 对于任何 $t>0$, (4.4.32)蕴含

$$\frac{\int_{S^{m-1}(t)} A(t, \theta) d\theta}{\int_{S^{m-1}(t)} [f(t)/t]^{m-1} d\theta} \Bigg\downarrow$$

由此,

$$\frac{\int_{S^{m-1}(t)} A(t, \theta) d\theta}{\int_{S^{m-1}(t)} [f(t)/t]^{m-1} d\theta} \leqslant \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{\int_{S^{m-1}(t)} A(t, \theta) d\theta}{\int_{S^{m-1}(t)} [f(t)/t]^{m-1} d\theta} \right\} = 1,$$

即

$$\int_{S^{m-1}(t)} A(t,\ \theta)d\theta \leqslant \int_{S^{m-1}(t)} [f(t)/t]^{m-1}d\theta. \quad (4.4.36)$$

注意到 $$\mathrm{Vol}(B_O(r)) = \int_0^r t^{m-1}\left[\int_{S^{m-1}(t)} A(t,\ \theta)d\theta\right]dt,$$

$$V(K_0;\ r) = \int_0^r t^{m-1}\left[\int_{S^{m-1}(t)} (f(t)/t)^{m-1}d\theta\right]dt,$$

则从(4.4.36)立即得所求.

(ii) 应用(4.4.33), 同理可证. ▮

黎曼几何的其他比较定理可参阅文献[18].

习　题

1. 设$\overline{M}(c)$是常曲率c的m维空间形式, ρ是从某点起始的距离函数(当$c>0$时, $\rho<\pi/\sqrt{c}$). 令$\varphi_1(\rho)=\rho^2$, $\varphi_2(\rho)=\log(1+\rho^a)$, a为实常数, 试计算$\mathrm{Hes}(\varphi_1(\rho))$和$\mathrm{Hes}(\varphi_2(\rho))$.

2. 设$(M,\ g)$是完备黎曼流形, 若存在某点$O\in M$, 使在关于O的测地极坐标系下, 度量g取(4.4.4)的形状, 且其中$h_{ij}(r,\ \theta)=h_{ij}(\theta)$, 即与径向坐标$r$无关, 则称$g$关于点$O$是**模式化的**. 试求这时沿径向测地线且与径向$\frac{\partial}{\partial r}$正交的 Jacobi 场的一般形状.

3. 设$M_k(k=1,2)$是两个m维黎曼流形, $\gamma_k:[0,\ r]\to M_k$是正规测地线, $\gamma_k(r)$不是$\gamma_k(0)$的割点. 记ρ_k为M_k上从$\gamma_k(0)$起始的距离函数, 用$\mathrm{Ric}^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)$表示$M_k$上沿$\gamma_k$径向的 Ricci 曲率, $k=1,2$. 若$\mathrm{Ric}^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)\geqslant\mathrm{Ric}^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)$且$M_2$的度量$g_2$关于$\gamma_2(0)$是模式化的, 则

$$(\Delta\rho_1)(\gamma_1(r))\leqslant(\Delta\rho_2)(\gamma_2(r)).$$

4. 设$(M,\ g)$是完备黎曼流形, 其上黎曼联络为∇. 设$f:M\to\mathbf{R}$是M上光滑函数. 证明:

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2)=|\mathrm{Hes}(f)|^2+\langle\nabla(\Delta f),\ \nabla f\rangle+\mathrm{Ric}^M(\mathrm{grad}f).$$

5. 设M_k, γ_k如习题3所述, 且M_1沿γ_1的径向曲率$\geqslant M_2$沿γ_2的径向曲率. 若$V_k(t)$是沿$\gamma_k(t)$的 Jacobi 场, 使得$V_k(0)$与γ_k相切, 且

$$\|V_1(0)\|=\|V_2(0)\|,\ \langle\gamma_1'(0),\ V_1'(0)\rangle=\langle\gamma_2'(0),\ V_2'(0)\rangle,$$

$$\|V_1'(0)\|=\|V_2'(0)\|,$$

则对一切 $t\in[0, r]$ 有 $\|V_1(t)\|\leqslant\|V_2(t)\|$(Rauch 比较定理).

[提示 参考 J. Cheeger & D. G. Ebin, "Comparison Theorems in Riemannian Geometry", North-Hol. Publ. Company, 1975, Amsterdam p. 29.]

6. 应用上述 Rauch 比较定理,直接证明定理 4.4.6.

7. 设 $\overline{M}(K_0)$ 是常曲率 K_0 的 m 维空间形式,固定一点 $O\in\overline{M}(K_0)$. 建立关于 O 的测地极坐标系(4.4.15). 设 $\gamma:[0, r]\to\overline{M}(K_0)$ 是从 O 出发的正规测地射线,其上没有 O 的共轭点, $\{E_1, \cdots, E_{m-1}, E_m=\gamma'(0)\}$ 是 $T_O(M)$ 的幺正基,沿 $\gamma(t)$ 拓展成平行场 $\{E_1(t), \cdots, E_{m-1}(t), E_m(t)=\gamma'(t)\}$. 再沿 $\gamma(t)$ 构造 $m-1$ 个相互正交的 Jacobi 场 $\widetilde{E}_i(t)$, 使 $\widetilde{E}_i(0)=0$, $\widetilde{E}_i'(0)=E_i$, $i=1, \cdots, m-1$. 证明: 借助指数映射 $\exp_O$, $\overline{M}(K_0)$ 的体积元 $dv_{\overline{M}}=[f(r)]^{m-1}dr\wedge dS_{m-1}$, 其中函数 f 由(4.4.17)定义, dS_{m-1} 是 $m-1$ 维单位球面的体积元.

8. 利用上题结果,具体计算:

(i) 半径为 R 的 m 维欧氏球面的体积;

(ii) m 维双曲空间形式 $\overline{M}(-1)$ 中半径为 R 的测地球的体积.

第五章 黎曼子流形

§1 子流形的基本公式

1.1 等距浸入

设(M, g)和$(\overline{M}, \overline{g})$分别是$n$和$n+p$维黎曼流形，$f: M\to\overline{M}$是浸入（嵌入）. 若在$f(M)\subset\overline{M}$上处处有

$$f^*\overline{g}=g,$$

则称f为等距浸入（嵌入），$f(M)$称为等距浸入（嵌入）子流形.

在局部范围内等距浸入可看作等距嵌入. 于是，对M和$f(M)$可不加区分，即对任意的点$P\in M$，我们也用同一字母表示点$f(P)\in\overline{M}$. 在本章中，流形上的点将改用大写字母P表示. 这样，切空间$T_P(M)$是切空间$T_P(\overline{M})$的m维子空间. 用$T_P^{\perp}(M)$表示$T_P(M)$在$T_P(\overline{M})$中的正交补集. 于是，

$$T_P(\overline{M})=T_P(M)\oplus T_P^{\perp}(M).$$

p维子空间$T_P^{\perp}(M)$称为M在点P的法空间. 命

$$T^{\perp}M=\bigcup_{P\in M}T_P^{\perp}(M).$$

和切丛TM一样，$T^{\perp}M$也可构成一个微分流形，称为M的法丛. 于是，

$$T\overline{M}=TM\oplus T^{\perp}M.$$

设(U, x^i)为M上坐标图，$(\overline{U}, y^A)$为$\overline{M}$上坐标图，使$f(U)\subset\overline{U}$. 在局部坐标系下，浸入f可表示成

$$y^A=f^A(x^1, \cdots, x^n), \tag{5.1.1}$$

这里及以后，若无特殊说明，我们常约定指标的取值范围如下：

$$A, B, C, \cdots=1, \cdots, n+p;$$

$$i, j, k, \cdots = 1, \cdots, n;$$

$$\alpha, \beta, \cdots = n+1, \cdots, n+p.$$

于是，等距浸入的条件就是

$$g_{ij} = \bar{g}_{AB} \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial y^B}{\partial x^j}, \tag{5.1.2}$$

其中 $g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)_g$ 和 $\bar{g}_{AB} = \left(\frac{\partial}{\partial y^A}, \frac{\partial}{\partial y^B}\right)_{\bar{g}}$.

设 X 为 M 上向量场，$f: M \to \bar{M}$ 为局部单射，则 $f_* X$ 是 $f(M)$ 上的向量场. 我们设法把 $f_* X$ 延拓成 $\bar{M}$ 的一个局部向量场，例如记为 $\bar{X}$. 显然，延拓的方式很多，重要的是由延拓而得出的 $\bar{X}$，当限制在 $f(M)$ 上时，应与 $f_* X$ 一致，而与延拓的方式无关，即

$$\bar{X}|_{f(M)} = f_* X.$$

局部地，M 上向量场

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

由 f_* 映成 $f(M)$ 上的向量场

$$f_* X = \left(X^i \frac{\partial y^A}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial y^A}.$$

今设 $\bar{X}(y)$ 为 $f_* X$ 在 $\bar{M}$ 中的局部延拓，使

$$\bar{X}(y)|_{y(x)} = f_* X(x).$$

换言之，若 $\bar{X}(y) = \bar{X}^A \frac{\partial}{\partial y^A}$，则

$$\bar{X}^A(y(x)) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i} X^i(x). \tag{5.1.3}$$

又设 Y 为 M 上另一向量场，$f_* Y$ 的局部延拓为 $\bar{Y}$，即

$$\bar{Y}^A(y(x)) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i} Y^i(x).$$

我们有

命题 5.1.1 设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是 f_*X 和 f_*Y 的局部延拓，则 $[\overline{X}, \overline{Y}]$ 和 $\overline{\nabla}_{X}\overline{Y}$ 在 $f(M)$ 上的限制与延拓的方式无关，这里 $\overline{\nabla}$ 表示 $(\overline{M}, \overline{g})$ 的黎曼联络．并且有

$$[\overline{X}, \overline{Y}]_{f(M)}=[f_*X, f_*Y]=f_*[X, Y]. \tag{5.1.4}$$

证明 由(5.1.3)

$$\begin{aligned}
&[\overline{X}, \overline{Y}]^A \frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}\\
&=\left(\overline{X}^B \frac{\partial \overline{Y}^A}{\partial y^B}-\overline{Y}^B \frac{\partial \overline{X}^A}{\partial y^B}\right)\frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}\\
&=\left\{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}\right)-Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}\\
&=[X, Y]^i \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}.
\end{aligned}$$

此即表示 $[\overline{X}, \overline{Y}]$ 在 $f(M)$ 上的限制与延拓方式无关。

因为
$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{Y}&=(\overline{\nabla}_X\overline{Y})^A \frac{\partial}{\partial y^A}\\
&=\overline{X}^B\left(\frac{\partial \overline{Y}^A}{\partial y^B}+\overline{\left\{\begin{matrix}A\\BC\end{matrix}\right\}}\overline{Y}^C\right)\frac{\partial}{\partial y^A},
\end{aligned}$$

故由(5.1.3)有

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{Y}\,\big|_{y(x)}=X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial y^A}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}\\
+X^iY^j \frac{\partial y^B}{\partial x^i} \frac{\partial y^C}{\partial x^j}\overline{\left\{\begin{matrix}A\\BC\end{matrix}\right\}}\frac{\partial}{\partial y^A}\Big|_{y(x)}.
\end{aligned}$$

上式右端表明与 f_*X 和 f_*Y 的延拓方式无关. ▌

根据上述命题，我们可将 f_*X 与 X，f_*Y 与 Y 等同视之，且 $\overline{\nabla}_X\overline{Y}\,|_{f(M)}$ 可简记为 $\overline{\nabla}_XY$. 它的正交分解记为

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+B(X, Y), \tag{5.1.5}$$

其中 $\nabla_XY\in TM$，$B(X, Y)\in T^{\perp}M$.

命题 5.1.2 设 $f: M \to \overline{M}$ 为等距浸入，则(5.1.5)中的 ∇ 是 (M, g) 的黎曼联络.

证明 设 $a, b \in C^\infty(M)$，则由(5.1.5)得

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{aX}(bY) &= a\{b\overline{\nabla}_X Y + (Xb)Y\}\\ &= a(Xb)Y + ab(\nabla_X Y + B(X, Y)).\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

另一方面，

$$\overline{\nabla}_{aX}(bY) = \nabla_{aX}(bY) + B(aX, bY). \tag{5.1.7}$$

比较两式的切向部分，即得

$$\nabla_{aX}(bY) = ab\nabla_X Y + a(Xb)Y.$$

可见 ∇ 为 M 上仿射联络.

又因在 $f(M)$ 上有

$$\begin{aligned}0 &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [\overline{X}, \overline{Y}]\\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + B(X, Y) - B(Y, X) - [X, Y].\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

对于切向部分，就有

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

最后，由(5.1.5)得

$$\begin{aligned}X\langle Y, Z\rangle_g &= \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle_{\overline{g}}\big|_{f(M)} = \langle \overline{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X Z\rangle\\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z\rangle_g.\end{aligned}$$

因此，∇ 为 (M, g) 的黎曼联络.

比较(5.1.6)和(5.1.7)的法向部分，有

$$B(aX, bY) = abB(X, Y).$$

由(5.1.8)的法向部分得

$$B(X, Y) = B(Y, X). \tag{5.1.9}$$

因此，若用 $\mathscr{X}^\perp(M)$ 表示法丛 $T^\perp M$ 中所有可微截面的集合，于是有下列命题.

命题 5.1.3 映射 $B: \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}^\perp(M)$ 是对称的和

$C^\infty(M)$双线性的．它在每点 $P\in M$，诱导了一个对称双线性映射 $B_P: T_P(M)\times T_P(M)\to T_P^\perp(M)$.

映射 B 称为等距浸入 f 的第二基本形式，或称为 M 在 $\overline{M}$ 中的第二基本形式.

设 $X\in\mathscr{X}(M)$，$\xi\in\mathscr{X}^\perp(M)$，仿照(5.1.5)可写着

$$\overline{\nabla}_X\xi=-A_\xi(X)+\nabla_X^\perp\xi, \tag{5.1.10}$$

其中 $-A_\xi(X)$ 和 $\nabla_X^\perp\xi$ 分别表示关于 M 的切向和法向分量．设 a, $b\in C^\infty(M)$，于是有

$$\overline{\nabla}_{aX}(b\xi)=a((Xb)\xi-bA_\xi(X)+b\nabla_X^\perp\xi),$$

及
$$\overline{\nabla}_{aX}(b\xi)=-A_{b\xi}(aX)+\nabla_{aX}^\perp(b\xi).$$

比较切向和法向部分，得

$$\begin{aligned}&A_{b\xi}(aX)=ab\,A_\xi(X),\\&\nabla_{aX}^\perp(b\xi)=a(Xb)\xi+ab\nabla_X^\perp\xi.\end{aligned} \tag{5.1.11}$$

由第一式即得

命题 5.1.4 由 $(X,\xi)\xrightarrow{A}-A_\xi(X)$ 定义的映射 $A:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}^\perp(M)\to\mathscr{X}(M)$ 是 $C^\infty(M)$ 双线性的．对任一点 $P\in M$，$-A_\xi(X)|_P$ 仅依赖于 X_P 和 ξ_P，它诱导了一个双线性映射 $(A)_P$: $T_P(M)\times T_P^\perp(M)\to T_P(M)$.

在点 $P\in M$，对于任一法向量 $\xi\in T_P^\perp(M)$，由 $X_P\xrightarrow{A_\xi}-A_\xi(X)|_P$ 定义的映射 $(A_\xi)_P: T_P(M)\to T_P(M)$ 是切空间中的线性变换，称为关于法向量 ξ 的 **Weingarten 变换**.

由(5.1.10)和(5.1.11)的第二式，可见 $\nabla^\perp$ 为一仿射联络，它称为 M 上的法联络，或 M 法丛上的联络．设 ξ, $\eta\in\mathscr{X}^\perp(M)$，则

$$\overline{\nabla}_X\xi=-A_\xi(X)+\nabla_X^\perp\xi,\quad \overline{\nabla}_X\eta=-A_\eta(X)+\nabla_X^\perp\eta.$$

由(5.1.10)可得

$$\langle\nabla_X^\perp\xi,\eta\rangle+\langle\xi,\nabla_X^\perp\eta\rangle=\langle\overline{\nabla}_X\xi,\eta\rangle+\langle\xi,\overline{\nabla}_X\eta\rangle=X\langle\xi,\eta\rangle_{\overline{g}}. \tag{5.1.12}$$

在法丛 $T^\perp M$ 上具有由 $\overline{M}$ 的度量 $\bar{g}$ 所诱导的度量. (5.1.12) 表明, 联络 $\nabla^\perp$ 是保持 $T^\perp M$ 上的度量的. 因此, 我们有

命题 5.1.5 法联络 $\nabla^\perp$ 是法丛 $T^\perp M$ 上的黎曼联络.

公式(5.1.5)和(5.1.10)分别称为子流形 M 的 Gauss 公式和 Weingarten 公式.

命题 5.1.6 对任意的 $X, Y\in\mathscr{X}(M)$ 和 $\xi\in\mathscr{X}^\perp(M)$, 有

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle=\langle B(X, Y), \xi\rangle=\langle X, A_\xi(Y)\rangle. \qquad (5.1.13)$$

因此, $(A_\xi)_P: T_P(M)\to T_P(M)$ 关于内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 是对称线性变换.

证明 由于 $\langle Y, \xi\rangle=0$, 故

$$\begin{aligned}0&=\langle\overline{\nabla}_XY, \xi\rangle+\langle Y, \overline{\nabla}_X\xi\rangle\\&=\langle B(X, Y), \xi\rangle-\langle Y, A_\xi(X)\rangle.\end{aligned}$$

再由 $B(X, Y)=B(Y, X)$, 命题得证. ∎

1.2 基本方程

因为 M 的余维 $\operatorname{codim} M=\dim\overline{M}-\dim M=p$, 故局部地可选取 $\mathscr{X}^\perp(M)$ 中 p 个幺正向量场 $\xi_{n+1}, \cdots, \xi_{n+p}$, 它们在 M 的一点处张成该点的 M 的法空间. 于是, (5.1.5)中的 B 可表示成

$$B(X, Y)=\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}h^\alpha(X, Y)\xi_\alpha, \qquad (5.1.14)$$

其中 $h^\alpha(X, Y)=h^\alpha(Y, X)$ 称为关于 ξ_α 的第二基本形式.

记 $A_\alpha=A_{\xi_\alpha}$, 由(5.1.13)得

$$h^\alpha(X, Y)=\langle A_\alpha(X), Y\rangle. \qquad (5.1.15)$$

现设 $X, Y, Z\in\mathscr{X}(M)$, 由(5.1.5)和(5.1.14), 可以算得

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_YZ)&=\overline{\nabla}_X(\nabla_YZ+h^\alpha(Y, Z)\xi_\alpha)\\&=\nabla_X(\nabla_YZ)-h^\alpha(Y, Z)A_\alpha(X)\\&\quad+\sum_\alpha\{h^\alpha(X, \nabla_YZ)+X(h^\alpha(Y, Z))\}\xi_\alpha\\&\quad+h^\alpha(Y, Z)\nabla_X^\perp\xi_\alpha,\end{aligned}$$

其中最后两项是M的法向分量. 此外,

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z=\nabla_{[X,Y]}Z+h^\alpha([X, Y], Z)\xi_\alpha$$
$$=\nabla_{[X,Y]}Z+\sum_\alpha(h^\alpha(\nabla_XY, Z)-h^\alpha(\nabla_YX, Z))\xi_\alpha.$$

以 K 和 R 分别表示 $\bar{M}$ 和 M 的曲率张量, 利用上面两式, 我们可得

$$\begin{aligned}&K(X, Y)Z\\&\quad=R(X, Y)Z+\sum_\alpha\{h^\alpha(X, \nabla_YZ)-h^\alpha(Y, \nabla_XZ)\\&\qquad+X(h^\alpha(Y, Z))-Y(h^\alpha(X, Z))\\&\qquad+h^\alpha(\nabla_YX, Z)-h^\alpha(\nabla_XY, Z)\}\xi_\alpha\\&\qquad+h^\alpha(Y, Z)\nabla_X^\perp\xi_\alpha-h^\alpha(X, Z)\nabla_Y^\perp\xi_\alpha\\&\qquad+h^\alpha(X, Z)A_\alpha(Y)-h^\alpha(Y, Z)A_\alpha(X).\end{aligned}\tag{5.1.16}$$

由此, 对任意的 $W\in\mathscr{X}(M)$, 利用(5.1.15), 便得

$$\begin{aligned}&\langle K(X, Y)Z, W\rangle\\&\quad=\langle R(X, Y)Z, W\rangle\\&\qquad+\sum_\alpha\{h^\alpha(X, Z)h^\alpha(Y, W)-h^\alpha(Y, Z)h^\alpha(X, W)\},\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}&R(W, Z, X, Y)\\&\quad=K(W, Z, X, Y)+\langle B(W, X), B(Z, Y)\rangle\\&\qquad-\langle B(W, Y), B(Z, X)\rangle.\end{aligned}\tag{5.1.17}$$

上式称为 M 的 Gauss 方程.

在(5.1.16)中, 考虑 $K(X,Y)Z$的法向部分$(K(X,Y)Z)^\perp$, 则

$$\begin{aligned}&(K(X, Y)Z)^\perp\\&\quad=\sum_\alpha\{(\nabla_Xh^\alpha)(Y, Z)-(\nabla_Yh^\alpha)(X, Z)\}\xi_\alpha\\&\qquad+h^\alpha(Y, Z)\nabla_X^\perp\xi_\alpha-h^\alpha(X, Z)\nabla_Y^\perp\xi_\alpha,\end{aligned}\tag{5.1.18}$$

其中 $(\nabla_X h^\alpha)(Y, Z)$

$$=X(h^\alpha(Y, Z))-h^\alpha(\nabla_X Y, Z)-h^\alpha(Y, \nabla_X Z).$$

(5.1.18) 称为 M 的 Codazzi 方程. 若定义 B 关于向量丛 $TM\oplus T^\perp M$ 上联络 $\tilde{\nabla}$ 的共变导数为

$$(\tilde{\nabla}_X B)(Y, Z)=\nabla^\perp_X B(Y, Z)-B(\nabla_X Y, Z)-B(Y, \nabla_X Z),$$

则 Codazzi 方程可简洁地表示成

$$(\tilde{\nabla}_X B)(Y, Z)-(\tilde{\nabla}_Y B)(X, Z)=(K(X, Y)Z)^\perp. \tag{5.1.18'}$$

法丛 $T^\perp M$ 的曲率张量 $R^\perp$ 定义如下：对于任何 $X, Y\in \mathscr{X}(M)$, $\xi\in\mathscr{X}^\perp(M)$, 命

$$R^\perp(X, Y)\xi=\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi-\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi-\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi.$$

类似于上面的计算，对于 $\eta\in\mathscr{X}^\perp(M)$, 有

$$\begin{aligned}\langle K(X, Y)\xi, \eta\rangle &=\langle\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\xi-\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\xi-\overline{\nabla}_{[X,Y]}\xi, \eta\rangle\\ &=-\langle\overline{\nabla}_X A_\xi(Y), \eta\rangle+\langle\overline{\nabla}_X\nabla^\perp_Y\xi, \eta\rangle\\ &\quad+\langle\overline{\nabla}_Y A_\xi(X), \eta\rangle-\langle\overline{\nabla}_Y\nabla^\perp_X\xi, \eta\rangle\\ &\quad-\langle\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi, \eta\rangle\\ &=\langle R^\perp(X, Y)\xi+B(Y, A_\xi(X))\\ &\quad-B(X, A_\xi(Y)), \eta\rangle.\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

由 η 的任意性，上式等价于

$$(K(X, Y)\xi)^\perp=R^\perp(X, Y)\xi+B(Y, A_\xi(X))-B(X, A_\xi(Y)), \tag{5.1.19'}$$

它称为 M 的 Ricci 方程.

若采用记号

$$[A_\xi, A_\eta]=A_\xi A_\eta-A_\eta A_\xi,$$

则(5.1.19)可简洁地写成

$$\langle K(X,Y)\xi,\eta\rangle=\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle-\langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle. \tag{5.1.19''}$$

1.3 活动标架法

下面我们给出活动标架下等距浸入子流形的基本方程的表达式.

在 $\overline{M}$ 内选取局部幺正标架场 $e_1,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$, 使得限制在 M 上时, 向量 $e_1,\cdots,e_n$ 是 M 的切向量, 从而 $e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$ 是 M 的法向量. 设 $\theta^1,\cdots,\theta^{n+p}$ 为对偶标架场, 于是 $\overline{M}$ 的结构方程是

$$\begin{cases} d\theta^A=-\sum\limits_B\theta^A_B\wedge\theta^B, & \theta^A_B+\theta^B_A=0, \\ d\theta^A_B=-\sum\limits_C\theta^A_C\wedge\theta^C_B+\Phi^A_B, \end{cases}$$

$$\Phi^A_B=\frac{1}{2}\sum_{C,D}\overline{K}^A_{BCD}\theta^C\wedge\theta^D,$$

其中 θ^A_B 和 Φ^A_B 分别是 $\overline{M}$ 的联络形式和曲率形式.

令
$$f^*\theta^A=\omega^A,\quad f^*\theta^A_B=\omega^A_B,$$

当限制在 M 上时,

$$\omega^\alpha=0. \tag{5.1.20}$$

由交换性 $d\circ f^*=f^*\circ d$, 对上式外微分, 利用结构方程得

$$\sum_i\omega^\alpha_i\wedge\omega^i=0.$$

据 Cartan 引理, 上式表明

$$\omega^\alpha_i=\sum_j h^\alpha_{ij}\omega^j,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}. \tag{5.1.21}$$

由(5.1.20), (5.1.21)及 $\overline{M}$ 的结构方程, 便可得 M 的结构方程

$$\begin{cases} d\omega^i=-\sum\limits_j\omega^i_j\wedge\omega^j, & \omega^i_j+\omega^j_i=0, \\ d\omega^i_j=-\sum\limits_k\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\Omega^i_j, \end{cases}$$

$$\Omega^i_j=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

其中

$$R^i_{jkl}=K^i_{jkl}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}),\qquad(5.1.22)$$

它就是M的 Gauss 方程.

同样可求得

$$d\omega^\alpha_\beta=-\sum_\gamma\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta+\Omega^\alpha_\beta,$$

$$\Omega^\alpha_\beta=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^\alpha_{\beta kl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

其中

$$R^\alpha_{\beta kl}=K^\alpha_{\beta kl}+\sum_i(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}),\qquad(5.1.23)$$

它正是 M 的 Ricci 方程.

因为 (ω^i_j) 和 (ω^α_β) 分别确定了 T^*M 和 $T^\perp M$ 上的联络,故在 $T^*M\oplus T^\perp M$ 上有一个联络. 由此可定义关于这个联络的共变导数 D, 它把 $T^\perp M\otimes\underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{s\text{次}}$ 的截面映为 $T^\perp M\otimes\underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{(s+1)\text{次}}$ 的截面. 例如,

$$S=S^\alpha_{ij}\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha$$

是 $T^\perp M\otimes T^*M\otimes T^*M$ 的一个截面,于是,DS 是 $T^\perp M\otimes T^*M\otimes T^*M\otimes T^*M$ 的截面,它定义为

$$DS=S^\alpha_{ijk}\omega^i\otimes\omega^j\otimes\omega^k\otimes e_\alpha,\qquad(5.1.24)$$

其中 S^α_{ijk} 由下式确定.

$$\sum_k S^\alpha_{ijk}\omega^k=dS^\alpha_{ij}-\sum_k S^\alpha_{kj}\omega^k_i-\sum_k S^\alpha_{ik}\omega^k_j+\sum S^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta.$$

(5.1.25)

对(5.1.21)两边外微分,利用结构方程,就有

$$\sum_{j,k}\left(h^{\alpha}_{ikj}-\frac{1}{2}K^{\alpha}_{ijk}\right)\omega^j\wedge\omega^k=0,$$

其中 h^{α}_{ijk} 由(5.1.25)的类似式定义．上式表明

$$h^{\alpha}_{ijk}-h^{\alpha}_{ikj}=-K^{\alpha}_{ijk},\tag{5.1.26}$$

它就是 M 的 Codazzi 方程．

现在，M 的第二基本形式局部地可写成

$$B=h^{\alpha}_{ij}\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_{\alpha},\tag{5.1.14′}$$

即对于任何 $X,\ Y\in\mathscr{X}(M)$，

$$B(X,\ Y)=h^{\alpha}_{ij}\omega^i(X)\omega^j(Y)e_{\alpha}.$$

法向量

$$H=\frac{1}{n}\operatorname{tr}B\tag{5.1.27}$$

称为 M 的平均曲率向量，即

$$H=\frac{1}{n}\sum_i B(e_i,\ e_i)=\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{n}\sum_i h^{\alpha}_{ii}\right)e_{\alpha}.\tag{5.1.28}$$

这个向量的长度 $\|H\|$ 称为 M 的平均曲率(绝对值)，即

$$\|H\|=\sqrt{\langle H,\ H\rangle}=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{\alpha}\left(\sum_i h^{\alpha}_{ii}\right)^2}.\tag{5.1.29}$$

在不引起混淆的地方，有时也简称 H 为平均曲率．

类似地，B 的模长 $\|B\|$ 称为 M 的第二基本形式的长度，即

$$\|B\|^2=\langle B,\ B\rangle=\sum_{\alpha,i,j}(h^{\alpha}_{ij})^2.\tag{5.1.30}$$

定义 5.1.1 设 $f: M\to\overline{M}$ 是等距浸入，若 $B=0$，则称 f 为全测地浸入，M 称为全测地子流形．若 $H=0$，则称 f 为极小浸入，M 称为极小子流形．

由(5.1.28)和(5.1.30)即得

命题 5.1.7 M 为全测地子流形的充要条件是 $h^{\alpha}_{ij}=0$．M 为极小子流形的充要条件是 $\sum_i h^{\alpha}_{ii}=0$．

现在可给出黎曼流形的截面曲率的几何解释．设

$$E_P\subset T_P(\overline{M}),\quad P\in\overline{M},$$

是一个2维平截面. 令 M_P 是过 P 的 $\overline{M}$ 的2维子流形, 它由过 P 且与 E_P 相切的 $\overline{M}$ 的测地线所构成, 则我们有

命题 5.1.8 若在 M_P 上赋予由黎曼度量 $\bar{g}$ 所诱导的度量, 则 $\overline{M}$ 的截面曲率 $K_P(E_P)$ 等于 M_P 在 P 的 Gauss 曲率.

证明 任取 $X\in T_P(M_P)=E_P\subset T_P(\overline{M})$, 令 γ 为过 P 沿 X 方向的 $\overline{M}$ 的测地线. 于是, 在 P 的邻近 $\gamma\subset M_P$. 把 X 延拓为 M_P 上向量场, 且使 X 是 γ 的切向量场. 于是, 由测地线定义,

$$(\overline{\nabla}_X X)_P=0.$$

设 B 是 M_P 的第二基本形式, 由(5.1.5), 则

$$(B(X,\ X))_P=0.$$

由于 X 的任意性, 即知

$$(B)_P=0,$$

即 M_P 局部地是 $\overline{M}$ 的2维全测地子流形. 上式代入 M_P 的 Gauss 方程, 即得所求证. ▮

1.4 常曲率空间的子流形

设 $\overline{M}$ 是 $n+p$ 维常曲率空间, 其截面曲率为常数 $\bar{c}$. 由(3.3.17), $\overline{M}$ 的曲率张量可表为

$$\overline{K}(W,\ Z,\ X,\ Y)$$
$$=\bar{c}(\langle W,\ X\rangle\langle Z,\ Y\rangle-\langle W,\ Y\rangle\langle Z,\ X\rangle).$$

在幺正标架场下, 其分量为

$$\overline{K}_{ABCD}=\bar{c}(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}).$$

于是, 子流形 M 的基本方程(5.1.17), (5.1.18)和(5.1.19)分别成为

$$R(W,\ Z,\ X,\ Y)$$
$$=\bar{c}(\langle W,\ X\rangle\langle Z,\ Y\rangle-\langle W,\ Y\rangle\langle Z,\ X\rangle)$$

$$+\langle B(W, X), B(Z, Y)\rangle-\langle B(W, Y), B(Z, X)\rangle, \tag{5.1.31}$$

$$(\tilde{\nabla}_X B)(Y, Z)-(\tilde{\nabla}_Y B)(X, Z)=0, \tag{5.1.32}$$

$$\langle R^{\perp}(X, Y)\xi, \eta\rangle=\langle [A_\xi, A_\eta] X, Y\rangle, \tag{5.1.33}$$

其中 $X, Y, Z, W\in\mathscr{X}(M), \quad \xi, \eta\in\mathscr{X}^{\perp}(M)$.

在幺正标架场下，这些方程的等价形式是

$$R_{ijkl}=\bar{c}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}), \tag{5.1.34}$$

$$h^\alpha_{ijk}-h^\alpha_{ikj}=0, \tag{5.1.35}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=\sum_j(h^\alpha_{jk}h^\beta_{jl}-h^\alpha_{jl}h^\beta_{jk}). \tag{5.1.36}$$

由(5.1.31)或(5.1.34)便得 M 的 Ricci 张量为

$$S(X, Y)=(n-1)\bar{c}\langle X, Y\rangle+n\langle H, B(X, Y)\rangle$$
$$-\sum_i\langle B(X, e_i), B(Y, e_i)\rangle, \tag{5.1.37}$$

或

$$R_{ij}=(n-1)\bar{c}\delta_{ij}+\sum_{\alpha,k}(h^\alpha_{kk}h^\alpha_{ij}-h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jk}). \tag{5.1.38}$$

由此，即得 M 的数量曲率为

$$\rho=n(n-1)\bar{c}+n^2\|H\|^2-\|B\|^2. \tag{5.1.39}$$

利用这些关系式，我们有

定理 5.1.9 设 $\bar{M}^{n+p}(\bar{c})$ 是常曲率 $\bar{c}$ 的黎曼流形，$f: M^n\to\bar{M}^{n+p}(\bar{c})$ 是等距浸入. 若 M 的第二基本形式长度平方满足 $\|B\|^2<a$，则 M 的截面曲率 K_M 满足

$$\bar{c}-\frac{1}{2}a\leqslant K_M\leqslant\bar{c}+\frac{1}{2}a. \tag{5.1.40}$$

证明 由(5.1.34)，对任何 $i\neq j$，有

$$R_{ijij}=\bar{c}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2). \tag{5.1.41}$$

因为

$$\sum_\alpha(h^\alpha_{ii}-h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_\alpha\{(h^\alpha_{ii})^2+(h^\alpha_{jj})^2\}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2,$$

并且 $\sum_\alpha(h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}-(h^\alpha_{ij})^2)$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\sum_\alpha\{(h^\alpha_{ii})^2+(h^\alpha_{jj})^2+2(h^\alpha_{ij})\}\geqslant -\frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}(h^\alpha_{ij})^2.$$

所以,由(5.1.41), (5.1.30)及定理假设条件,即得所求证. ▮

推论 1 设 $f: M^n \to \overline{M}^{n+p}(\bar{c})$ 是极小浸入,若 M 的数量曲率满足 $\rho\geqslant n(n-1)\bar{c}-a$, 则 M 的截面曲率满足(5.1.40)

这可从(5.1.39)和 $H=0$ 立即推得.

推论 2 设 $f: M^n \to \overline{M}^{n+p}(\bar{c})$ 是等距浸入,若 $\|B\|^2$ 有上界,则 M 的截面曲率有界, 从而 M 的 Ricci 曲率和数量曲率也都有界.

以后在不引起混淆的地方, 我们把等距浸入 $f: M \to \overline{M}$ 简称为 M 是 $\overline{M}$ 的(浸入)子流形.

习　题

1. 设 $M \to \overline{M}$ 是等距浸入子流形, $\sigma:[a, b]\to M\subset\overline{M}$ 为 C^2 曲线, 它的单位切向量场为 $\dot{\sigma}$. 则 $\overline{\nabla}_{\dot\sigma}\dot{\sigma}$, $\nabla_{\dot\sigma}\dot{\sigma}$ 和 $B(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})$ 分别称为曲线 σ 的**绝对曲率向量**, **相对曲率向量**和**法曲率向量**, 它们的长度分别称为 σ 的**绝对曲率**、**相对曲率**和**法曲率**. 试证:

(i) 绝对曲率的平方等于相对曲率的平方与法曲率平方之和;

(ii) 以 θ 表示绝对曲率向量与法曲率向量之夹角,则绝对曲率 k 和法曲率 k_n 之间满足关系:

$$k_n=k\cos\theta;$$

(iii) 若 σ 是 $\overline{M}$ 的测地线, 则 σ 也是 M 的测地线. 曲线 σ 是 M 的测地线,当且仅当 σ 的绝对曲率向量与 M 正交。

2. 利用共变导数 $\widetilde{\nabla}_X B$, 将 Codazzi 方程化为(5.1.18′).

3. 证明 Ricci 方程可表成(5.1.19′)或(5.1.19″).

4. 详细推导(5.1.22)和(5.1.23). 试证: 当 codim $M=p=1$ 时, (5.1.23)恒成立.

5. 试证(5.1.18′)等价于(5.1.26).

6. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 和 b 是 $n+1(n\geqslant 2)$ 个实数,满足下列条件:

$$(\sum_i a_i)^2 > (n-1)\sum_i a_i^2 + b,$$

则对于任何 $i \neq j$, 成立下面的不等式:

$$2a_i a_j > b/(n-1) \quad (i \neq j).$$

7. 利用上题的代数结果, 试证: 设 $M \to \overline{M}(\bar{c})$ 是常曲率 $\bar{c}$ 空间的 n 维子流形 $(n \geq 2)$, 若 M 的数量曲率在某点 $P \in M$ 满足

$$\rho > (n-2)\|B\|^2 + (n-1)(n-2)\bar{c} + 2(n-1)a,$$

其中 a 是某个实数, 则在该点 P, M 的截面曲率 $(K_M)_P$ 满足

$$(K_M)_P > a.$$

[提示] 参考B. Y. Chen & M. Okumura, Proc. A. M. S., 38, (1973), 605—608.

8. 设 $M \to \overline{M}$ 是等距浸入子流形, M 的一个法向量场 ξ 称为在法丛中平行, 若对任何 $X \in \mathscr{X}(M)$ 有 $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$. 设它的长度 $\|\xi\| \neq 0$, 则不妨取 $e_{n+1} = \xi/\|\xi\|$. 试证: 在幺正标架下, ξ 平行的充要条件是

$$\|\xi\| = \text{const.} \quad 且 \quad \omega^{\beta}_{n+1} = 0.$$

9. 设 B 是子流形 M 的第二基本形式, 若 $\tilde{\nabla}_X B = 0$, $X \in \mathscr{X}(M)$, 则称 M 具有平行第二基本形式. 试证明: M 具有平行第二基本形式当且仅当

$$h^{\alpha}_{ijk} = 0.$$

10. 在局部幺正标架场下, 记 H^{α} 为 $n \times n$ 矩阵 (h^{α}_{ij}). 试证: 若法向量 e_{α} 在法丛中平行, 则

$$H^{\alpha} H^{\beta} = H^{\beta} H^{\alpha}.$$

11. 设 $M \to \overline{M}$ 是等距浸入子流形。若对于任何 $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, $B(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$, 则称 M 为全脐点子流形. 证明: 常曲率空间的 $n(\geq 2)$ 维全脐点子流形也是常曲率的.

12. 设 $M \to \overline{M}$ 是等距浸入子流形, 若 M 的平均曲率向量 H 在法丛中平行, 则称 M 具有平行平均曲率向量. 试证: 在局部幺正标架场下, M 具有平行平均曲率向量的充要条件是 $\sum_i h^{\alpha}_{iik} = 0$, 对一切 α, k 成立.

「提示」 利用习题 8.

§2 超曲面

2.1 超曲面的基本公式及其应用

余维数为 1 的等距浸入子流形 $M^n \to \overline{M}^{n+1}$ 称为超曲面, 它是

三维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中经典曲面的直接推广.

对于超曲面 M^n, 我们可局部地选取单位法向量场 ξ, 并写着

$$B(X, Y)=h(X, Y)\xi, \tag{5.2.1}$$

其中 h 就是 M(关于 ξ)的第二基本形式(见(5.1.14)). 另一方面, 微分 $\langle\xi, \xi\rangle=1$, 得

$$\langle\overline{\nabla}_X\xi, \xi\rangle=0,$$

即

$$\langle\nabla_X^\perp\xi, \xi\rangle=0.$$

因为 $\nabla_X^\perp\xi$ 是法向的, 又 $\operatorname{codim} M=1$, 故上式意味着

$$\nabla_X^\perp\xi=0. \tag{5.2.2}$$

根据 (5.2.1) 和(5.2.2), M 的 Gauss 公式和 Weingarten 公式变为

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y&=\nabla_X Y+h(X, Y)\xi,\\ \overline{\nabla}_X\xi&=-A(X),\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

其中 A 就是(关于 ξ)Weingarten 变换, 它满足

$$\langle A(X), Y\rangle=h(X, Y). \tag{5.2.4}$$

由(5.2.1)和(5.2.4), M 的 Gauss 方程成为

$$\begin{aligned}&R(W, Z, X, Y)\\ &\quad=K(W, Z, X, Y)+h(W, X)h(Z, Y)\\ &\qquad-h(W, Y)h(Z, X),\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

或等价地

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z=K(X, Y)Z&+h(Y, Z)A(X)\\ &-h(X, Z)A(Y).\end{aligned} \tag{5.2.5'}$$

利用(5.2.2), 我们有

$$(\widetilde{\nabla}_X B)(Y, Z)=(\nabla_X h(Y, Z))\xi.$$

于是, M 的 Codazzi 方程成为

$$\nabla_X h(Y, Z)-\nabla_Y h(X, Z)=\langle K(X, Y)Z, \xi\rangle, \tag{5.2.6}$$

或等价地

$$\langle \nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X),\ Z \rangle = \langle K(X, Y)Z,\ \xi \rangle, \tag{5.2.6'}$$

这里 $\nabla_X A(Y) = \nabla_X(A(Y)) - A(\nabla_X Y)$.

此外，由(5.2.2)和(5.1.19′)可知，这时M的 Ricci 方程自然满足.

当采用 § 1.3 所述的活动幺正标架场时，可取 $e_{n+1} = \xi$ 为超曲面的单位法向量场. 于是，类似于(5.1.22)—(5.1.26)的局部公式是

$$\begin{cases} d\omega^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j,\ \omega^i_j + \omega^j_i = 0, \\ d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R^i_{jkl} \omega^k \omega^l, \end{cases} \tag{5.2.7}$$

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \tag{5.2.8}$$

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} = -K^{n+1}_{ijk}, \tag{5.2.9}$$

其中已把 h^{n+1}_{ij} 写为 h_{ij}，并且(5.2.1)确定的 $h(X, Y)$可表达为

$$h = h_{ij}\omega^i \otimes \omega^j. \tag{5.2.10}$$

超曲面的一个典型例子是带边界黎曼流形$(\overline{M}^{n+1}, \bar{g})$的边界 $\partial\overline{M}$(见第二章，§ 4.2)，利用包含映射 $i_n: \partial\overline{M} \to \overline{M}^{n+1}$，把度量 $\bar{g}$ 拉回到 $\partial\overline{M}$ 上，使 $\partial\overline{M}$ 成为一个 n 维黎曼流形，它就是$(\overline{M}^{n+1}, \bar{g})$的等距浸入(包含映射)超曲面. 利用这一点，我们可导出散度定理 3.4.2 的另一表达形式——Green 定理.

设 $\overline{M}^{n+1}$ 是紧致定向的，从而其边界 $\partial\overline{M}$ 有一个自然诱导定向. 在 $\overline{M}^{n+1}$ 中选取局部幺正标架场$\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}\}$，使得当限制在 $\partial\overline{M}$ 上时，e_{n+1} 是 $\partial\overline{M}$ 的单位内法向量场（参考第二章，§ 4，习题 8)，从而向量 $e_1, \cdots, e_n$ 与 $\partial\overline{M}$ 相切. 设 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n, \omega^{n+1}\}$ 是关于上述所选标架场的对偶场，$\overline{M}^{n+1}$ 的体积元(决定了 $\overline{M}$ 的一个定向)是

$$dV = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n+1}.$$

当限制在 $\partial\overline{M}$ 上时，$\omega^{n+1} = 0$; 这时 $\partial\overline{M}$ 的诱导定向是（比较

(2.4.8)式)

$$(-1)^{n+1}\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n=(-1)^{n+1}dS, \qquad (5.2.11)$$

其中 $dS=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 称为 $\partial\overline{M}$ 的自然定向体积元.

设 X 是 $\overline{M}^{n+1}$ 的(反变)向量场，局部表示为

$$X=X^A e_A.$$

由于 $\overline{g}_{AB}=\langle e_A, e_B\rangle=\delta_{AB}$, 故它的对偶微分形式为

$$X^b=\sum_A X^A\omega^A.$$

根据(3.4.8′),

$$*X^b=\sum_{B_2<\cdots<B_{n+1}}\sum_A \delta^{1\ \cdots n+1}_{AB_2\cdots B_{n+1}}X^A\omega^{B_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{B_{n+1}}.$$

当限制在 $\partial\overline{M}$ 上时，由于 $\omega^{n+1}=0$, 故

$$(*X^b)_{\partial\overline{M}}=(-1)^n(\langle X, e_{n+1}\rangle\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n)_{\partial\overline{M}}.$$

引入 $\partial\overline{M}$ 的单位外法向量场 $\nu=-e_{n+1}$, 则由(5.2.11)得

$$(*X^b)_{\partial\overline{M}}=\langle X, \nu\rangle(-1)^{n+1}dS. \qquad (5.2.12)$$

代入 Stokes 公式(3.4.14′), 便有

$$\int_{\overline{M}}(\operatorname{div} X)dV=\int_{\partial\overline{M}}(*X^b)_{\partial\overline{M}}=\int_{\partial\overline{M}}(-1)^{n+1}(*X^b)_{\partial\overline{M}}$$

$$=\int_{\partial\overline{M}}\langle X, \nu\rangle dS.$$

因此，定理 3.4.2 的另一种形式是

定理 5.2.1 设 $\overline{M}^{n+1}$ 是 $n+1$ 维紧致定向的黎曼流形，具有光滑边界 $\partial\overline{M}$, ν 是 $\partial\overline{M}$ 的外法向量场. 若 X 是 $\overline{M}^{n+1}$ 的可微向量场，则

$$\int_{\overline{M}}(\operatorname{div} X)dV=\int_{\partial\overline{M}}\langle X, \nu\rangle dS, \qquad (5.2.13)$$

其中 dV 和 dS 分别是 $\overline{M}^{n+1}$ 和 $\partial\overline{M}$ 的自然定向体积元. 特别对于 $\overline{M}^{n+1}$ 上光滑函数 $f\in C^\infty(\overline{M})$, 我们有

$$\int_{\overline{M}} (\overline{\Delta} f) dV = \int_{\partial \overline{M}} \frac{\partial f}{\partial \nu} dS, \tag{5.2.14}$$

其中 $\overline{\Delta}$ 表示 $\overline{M}^{n+1}$ 的 Laplacian, $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ 表示 f 沿 ν 的方向导数, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \mathrm{grad}\, f, \nu \rangle |_{\partial \overline{M}}.$$

推论 1(Green 公式) 设 $\overline{M}^{n+1}$ 如定理 5.2.1 所述, $f, h \in C^\infty(\overline{M})$, 则

$$\int_{\overline{M}} (h \overline{\Delta} f - f \overline{\Delta} h) dV = \int_{\partial \overline{M}} \left(h \frac{\partial f}{\partial \nu} - f \frac{\partial h}{\partial \nu} \right) dS. \tag{5.2.15}$$

证明 因为

$$\overline{\Delta} f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f),$$

对于向量场 $h(\mathrm{grad}\, f)$, 就有

$$\mathrm{div}(h(\mathrm{grad}\, f)) = \langle \mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f \rangle + h \overline{\Delta} f.$$

两边积分, 应用(5.2.13)得

$$\int_{\overline{M}} \langle \mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f \rangle dV + \int_{\overline{M}} h \overline{\Delta} f\, dV = \int_{\partial \overline{M}} h \frac{\partial f}{\partial \nu} dS.$$

交换 f 与 h 的地位, 又有

$$\int_{\overline{M}} \langle \mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f \rangle dV + \int_{\overline{M}} f \overline{\Delta} h\, dV = \int_{\partial \overline{M}} f \frac{\partial h}{\partial \nu} dS.$$

两式相减便得所证. ▌

推论 2(Hopf 极大原理) 设 $\overline{M}$ 是紧致定向的无边界的黎曼流形, 则 $\overline{M}$ 上任何下调和函数均为常数.

证明 设 $f \in C^2(\overline{M})$, $\overline{\Delta} f \geqslant 0$, 即 f 是下调和的. 不妨设

$f\geqslant 0$，否则可用 $\tilde{f}=f-f_{\min}$ 代换 f，这里 $f_{\min}=\min\limits_{M}\{f\}$. 因为

$$\frac{1}{2}\langle f^2=\operatorname{grad} f,\ \operatorname{grad} f\rangle+f\bar{\Delta} f\geqslant 0,$$

两边积分，注意到 $\partial\bar{M}=\varnothing$，即得

$$0=\int_{M}\|\operatorname{grad} f\|^2+\int_{M}(f\bar{\Delta} f)\,dV\geqslant 0.$$

既然 $f\geqslant 0$，$\bar{\Delta} f\geqslant 0$，上式表明只能 $\operatorname{grad} f=0$，即 $f=\text{const}$.

注 显然，推论中的下调和性 $\bar{\Delta} f\geqslant 0$ 也可用上调和性 $\bar{\Delta} f\leqslant 0$ 代替. 这个极大原理的推广见附录 IV.

2.2 主曲率

设 M 是 $\bar{M}^{n+1}$ 的超曲面，ξ 是 M 的单位法向量，由命题 5.1.6，对应的 Weingarten 变换 A 是 M 切空间的对称双线性变换. 换言之，对于任一点 $P\in M$，设 $\{X_1,\ \cdots,\ X_m\}$ 是 $T_P(M)$ 的一个基，则 $n\times n$ 矩阵 $(h(X_i,\ X_j))$ 是对称的. 因此，在 $T_P(M)$ 中存在幺正基 $\{e_i\}$，使得

$$A(e_i)=\lambda_i e_i,\qquad h(e_i,\ e_j)=\lambda_i\delta_{ij},\tag{5.2.16}$$

其中 $\lambda_i=\lambda_i(P)$ 是线性变换 A 在 P 点的特征值，即矩阵 $(h(X_i,\ X_j))_P$ 的特征值. 显然，它们与 $T_P(M)$ 中基的选择无关.

定义 5.2.1 Weingarten 变换 A 在 P 点的特征值 λ_i 称为 M 在 P 点的**主曲率**，对应的特征方向 e_i 称为**主方向**，λ_i 的重数称为该主曲率的**重数**.

若用 E_{ij} 表示由主方向 e_i 和 e_j 所张成的二维平截面，用 K_P 和 $\bar{K}_P$ 分别表示 M 和 $\bar{M}^{n+1}$ 在 P 点的截面曲率，则由 Gauss 方程 (5.2.5) 和 (5.2.16)，即得

$$K_P(E_{ij})-\bar{K}_P(E_{ij})=\lambda_i\lambda_j\quad(i\neq j).\tag{5.2.17}$$

上式左边称为平截面 E_{ij} 的相对曲率. 当 $n=2$，$\bar{M}^3=\boldsymbol{R}^3$ 时，这就

是古典曲面论中 Gauss 曲率的定义.

由(5.2.16)还可得

$$\operatorname{tr} h=\sum_i \lambda_i.$$

因此, 根据(5.1.29), 超曲面 M 的平均曲率就是它的主曲率的算术平均, 即 $\frac{1}{n}\operatorname{tr} h$.

设 $\lambda_1(P)$是 M 在 $P\in M$ 的 r 重主曲率, 不妨认为

$$\lambda_1(P)=\lambda_2(P)=\cdots=\lambda_r(P),$$

则 $\lambda_1(P)$所对应的特征子空间 $E_r(P)\subset T_P(M)$是 r 维的. $E_r(P)$ 中任何向量都是主方向, 它称为关于 $\lambda_1(P)$的**主方向空间**. 如果在每点 $P\in M$, λ_1 都是 r 重的, 即主曲率 λ_1 的重数在 M 上是常数 r, 则对应的主方向空间构成M上的一个 r 维分布 (参考第二章, § 2)

$$\mathscr{D}_r=\bigcup_{P\in M} E_r(P),\ E_r(P)\subset T_P(M)\text{是关于 }\lambda_1\text{ 的主方向空间}.$$

定理 5.2.2 设 $\overline{M}^{n+1}$ 是常曲率空间, M 是 $\overline{M}^{n+1}$ 的连通超曲面. 若 M 的主曲率的重数在 M 上为常数, 则每个主曲率所对应的主方向空间构成的分布是可积的.

证明 因为 M 的主曲率的重数在 M 上为常数, 故在 $\overline{M}^{n+1}$ 中可选取局部幺正标架场$\{e_1,\ \cdots,\ e_n,\ e_{n+1}\}$, 使得当限制在 M 上时, e_{n+1} 是M的单位法向量场, 且使 $\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 M 的主方向. 换言之, 它们的对偶标架场 $\{\omega^1,\ \cdots,\ \omega^n,\ \omega^{n+1}\}$ 限制在M上时,

$$\omega^{n+1}=0,$$

$$\omega_i^{n+1}=\lambda_i\omega^i\ (i\text{ 不作和}), \tag{5.2.18}$$

其中 λ_i 是 M 的主曲率, 其对应主方向为 e_i. 可证明这样选取的标架场是可微的(见[19]). 对(5.2.18)外微分, 应用(5.2.7)得

$$d\omega_i^{n+1}=d\lambda_i\wedge\omega^i-\lambda_i\sum_j\omega_j^i\wedge\omega^j. \tag{5.2.19}$$

另一方面，设 $\bar{M}^{n+1}$ 的常数截面曲率为 $\bar{c}$，由 $\bar{M}^{n+1}$ 的结构方程（限制在 M 上），

$$d\omega_i^{n+1}=-\sum_j \omega_j^{n+1}\wedge\omega_i^j+\bar{c}\omega^{n+1}\wedge\omega^i=-\sum_j \lambda_j\omega^j\wedge\omega_i^j.$$

把它代入(5.2.19)得

$$d\lambda_i\wedge\omega^i-\sum_j(\lambda_i-\lambda_j)\omega_j^i\wedge\omega^j=0,$$

即

$$\sum_j \Psi_j^i\wedge\omega^j=0, \tag{5.2.20}$$

其中

$$\Psi_j^i=\delta_j^i d\lambda_j-(\lambda_i-\lambda_j)\omega_j^i,\quad \Psi_j^i=\Psi_i^j. \tag{5.2.21}$$

由 Cartan 引理，(5.2.20)意味着

$$\Psi_j^i=\sum_k F_{ijk}\omega^k,\quad F_{ijk}=F_{ikj}. \tag{5.2.22}$$

由(5.2.21)和(5.2.22)的第二式，可见

$$F_{ijk}=F_{jik}=F_{ikj}=F_{kji}, \tag{5.2.23}$$

即 F_{ijk} 关于三个指标都是对称的.

此外，由(5.2.21)的第一式，当 $\lambda_i=\lambda_j$ 且 $i\neq j$ 时，$\Psi_j^i=0$，因此

$$F_{ijk}=0\quad \forall\lambda_i=\lambda_j \text{ 且 } i\neq j. \tag{5.2.24}$$

现设主曲率 λ_1 具有常值重数 r，不失一般性，可设

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_r.$$

用 $\mathscr{D}_r$ 表示对应的主方向空间构成的分布，并约定下列指标的取值范围为：

$$1\leqslant a,\ b,\ \cdots\leqslant r;\quad r+1\leqslant\sigma,\ \tau,\ \cdots\leqslant n.$$

考虑 Pfaff 方程组

$$\omega^\sigma=0. \tag{5.2.25}$$

由(5.2.7)，(5.2.21)和(5.2.22)，我们有

$$d\omega^\sigma=-\sum_\tau \omega_\tau^\sigma\wedge\omega^\tau+\sum_{a,i}(\lambda_\sigma-\lambda_1)^{-1}F_{\sigma ai}\omega^i\wedge\omega^a. \tag{5.2.26}$$

根据(5.2.23)和(5.2.24),

$$\sum_{a,i} F_{\sigma ai}\omega^i\wedge\omega^a=\sum_{a,i} F_{ai\sigma}\omega^i\wedge\omega^a=\sum_{a,\tau} F_{a\tau\sigma}\omega^\tau\wedge\omega^a$$
$$=\sum_{a,i} F_{\sigma a\tau}\omega^\tau\wedge\omega^a.$$

因此,(5.2.26)成为

$$d\omega^\sigma=-\sum_\tau \omega^\sigma_\tau\wedge\omega^\tau-\sum_{a,\tau}(\lambda_\sigma-\lambda_1)^{-1}F_{\sigma a\tau}\omega^a\wedge\omega^\tau.$$

这表明 $d\omega^\sigma=0$ 是 (5.2.25) 的代数推论. 由 Frobenius 定理 2.3.7, 方程组(5.2.25)是完全可积的, 即分布 $\mathscr{D}_r$ 是可积的. ▮

推论 1 在定理 5.2.2 的假设下, 若 $r\geqslant 2$, 则 λ_1 在 $\mathscr{D}_r$ 的每个积分流形上为常数.

证明 在(5.2.21)中取 $i=j=a$, 由(5.2.23)和(5.2.24).

$$d\lambda_a=\sum_b F_{aab}\omega^b+\sum_\sigma F_{aa\sigma}\omega^\sigma=F_{aaa}\omega^a+\sum_\sigma F_{aa\sigma}\omega^\sigma.$$

相仿, 对于 $b\neq a$ 又有

$$d\lambda_b=F_{bbb}\omega^b+\sum_\sigma F_{bb\sigma}\omega^\sigma.$$

因为 $r\geqslant 2$, $\lambda_a=\lambda_b=\lambda_1$, 故由此两式得

$$F_{aaa}=0.$$

从而 $$d\lambda_1=\sum_\sigma F_{11\sigma}\omega^\sigma=0 \quad (\bmod\ \omega^\sigma=0).$$

这表明在 $\mathscr{D}_r$ 的每个积分流形 $(\omega^\sigma=0)$ 上, $\lambda_1=$常数. ▮

定义 5.2.2 设 $M\to\overline{M}^{n+1}$ 是超曲面, 若在点 $P\in M$, M 的 n 个主曲率都相等, 则 P 称为 M 的脐点. 若 M 的每点都是脐点, 则称 M 是 $\overline{M}^{n+1}$ 的全脐点超曲面.

显然, 全测地超曲面是全脐点的. 由定理 5.2.2 及其推论 1, 即得

推论 2 常曲率空间中的 $n(\geqslant 2)$ 维连通的全脐点超曲面也是常曲率的.

超曲面的主曲率概念也可推广到子流形上. 设 $M^n\to\overline{M}^{n+p}$ 是

余维为 p 的子流形，则在 M^n 每点的法空间中，可选取 p 个幺正法向量 $\{\xi_\alpha\}$，$n+1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n+p$. 对于每个固定的 α，由命题 5.1.6，ξ_α 对应的 Weingarten 变换 $A_\alpha(=A_{\xi\alpha})$ 是该点切空间中的对称双线性变换. 于是，类似于定义 5.2.1，我们把 A_α 的特征值 λ_i^α 称为 M 关于 ξ_α 的主曲率，对应的特征方向称为关于 ξ_α 的主方向.

若 n 个主曲率 λ_i^α 相等，则称 M 关于 ξ_α 是脐性的，或称 ξ_α 是法丛 $T^\perp M$ 的一个脐性截面. 若 M 关于任何单位法向量都是脐性的，则称 M 为全脐点子流形. 显然，全测地子流形是特殊的全脐点子流形.

一般地说，对于 $\beta\neq\alpha$，ξ_α 的主方向不一定是 ξ_β 的主方向，因此，对子流言而言，自然关注的一个问题是，能否找到切空间的一个基 $\{e_i\}$，使每个 e_i 是关于所有 ξ_α 的主方向？换言之，若用 H^α 表示矩阵 $(h^\alpha(e_i, e_j))$，则能否使所有矩阵 H^α 同时对角化？为此，我们引入下列概念.

定义 5.2.3 设 $\nabla^\perp$ 是子流形 $M^n\to\overline{M}^{n+p}$ 的法联络，若对应的曲率张量 $R^\perp$ 恒消失，即 $R^\perp(X, Y)=0\ \forall X, Y\in\mathscr{X}(M)$，则称法联络是平坦的，或称 M^n 的法丛是平坦的.

显然，超曲面的法联络是自然平坦的. 现在可回答上面的问题.

定理 5.2.3 (Cartan, E., 1946) 设 M^n 是常曲率空间 $\overline{M}^{n+p}(\bar{c})$ 的子流形，$\{\xi_\alpha\}$ 是 M^n 的局部幺正法向量场，它们对应的第二基本形式为 $\{h^\alpha\}$，则在 M^n 的每点所有 H^α 能同时对角化的充要条件是 M^n 的法丛为平坦.

证明 必要性 若存在局部幺正基 $\{e_i\}\in TM$，使得在 M^n 的每点，H^α 能同时对角化，即对所有 α，

$$A_\alpha(e_i)=\lambda_i^\alpha e_i, \tag{5.2 27}$$

其中 λ_i^α 是 M^n 关于 ξ_α 的主曲率. 把上式代入(5.1.36)就有

$$\langle R^{\perp}(e_i, e_j)\xi_\alpha, \xi_\beta\rangle=0.$$

由于曲率算子 $R^{\perp}$ 的线性性，即得 $R^{\perp}=0$. 因此，M^n 的法丛是平坦的.

充分性　设 M^n 的法丛是平坦的，即 $R^{\perp}=0$. 根据(5.1.36)，对于任何 $X, Y\in TM$，有 $\langle[A_\alpha, A_\beta]X, Y\rangle=0$. 由于 X, Y 的任意性，这等价于

$$A_\alpha A_\beta=A_\beta A_\alpha. \tag{5.2.28}$$

考虑任一点 $P\in M^n$，先固定一个指标 α，于是在 $T_P(M)$ 中存在幺正基 $\{e_i\}$，使(5.2.27)成立. 对于 $\beta\neq\alpha$，由(5.2.28)，

$$A_\alpha(A_\beta e_i)=A_\beta(A_\alpha e_i)=\lambda_i^\alpha A_\beta(e_i). \tag{5.2.29}$$

设

$$A_\beta(e_i)=\sum_j h_{ij}^\beta e_j,$$

则由(5.2.27)得

$$A_\alpha(A_\beta e_i)=\sum_j h_{ij}^\beta A_\alpha(e_j)=\sum_j h_{ij}^\beta\lambda_j^\alpha e_j,$$

$$\lambda_i^\alpha A_\beta(e_i)=\sum_j \lambda_i^\alpha h_{ij}^\beta e_j.$$

代入(5.2.29)的两边，便得

$$\sum_j(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)h_{ij}^\beta e_j=0.$$

由$\{e_j\}$的正交性，这等价于

$$(\lambda_i^\alpha-\lambda_j^\alpha)h_{ij}^\beta=0\quad(i, j\text{ 不作和}). \tag{5.2.30}$$

若 λ_i^α 是 A_α 的单根，则由(5.2.30)得

$$h_{ij}^\beta=0\quad(i\neq j),$$

即 e_i 也是 A_β 的特征方向.

若 $\lambda_{i_1}=\cdots=\lambda_{i_r}$ 是 A_α 的 r 重根，则由 $\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}\}$ 张成的子空间 $E_r\subset T_P(M)$ 是 A_α 的主方向空间. 由于(5.2.30)，这时有

$$h_{ij}^\beta=0\quad(i=i_1, \cdots, i_r,\ j\neq i_1, \cdots, i_r),$$

于是，只要考虑矩阵

$$H^{\beta}=(h^{\beta}_{ij})$$

中的 r 阶主方块 $(h^{\beta}_{i_s i_t})_{1<s,t<r}$ 是否能用 A_α 的特征向量来对角化？注意到

$$h^{\beta}_{i_s i_t}=h^{\beta}(e_{i_s},\ e_{i_t}),$$

我们可在 E_r 中适当选取 r 个单位正交向量 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}$，使 r 阶对称矩阵 $(h^{\beta}_{i_s i_t})_{1<s,t<r}$ 对角线化．由于 E_r 是 A_α 的主方向空间，这些 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}$ 仍是 A 的特征向量．这样，我们就在 E_r 中找到一组向量 $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$，它们同时是 A_α 和 A_β 的特征方向．

综上所述，由于(5.2.28)，我们可使 h^α 和 h^β 同时对角线化．

以此类推，通过局部调整，我们可以使一切 H^α 同时对角线化．∎

2.3 欧氏空间的超曲面

设外围流形是 $n+p$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+p}$，x 表示 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的点（关于原点）的位置向量，同时用 $x: M^n \to \boldsymbol{R}^{n+p}$ 表示 n 维黎曼流形 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的等距浸入．于是，$x(P)$ 便是点 $P\in M^n$ 在 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 中的位置向量．在不引起混淆时，也简单地用 x 表示 $M^n\subset\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的位置向量．

取 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的局部幺正标架场 $\{e_A\}$，使得当限制在 M 上时，$\{e_i\}$ 与 M 相切． 对于 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的结构方程，我们有（参考（5.3.1）和(5.3.2)）

$$\begin{cases} dx=\sum\limits_A \theta^A e_A, \\ de_A=\sum\limits_B \theta^B_A e_B. \end{cases}$$

把它们限制在 M^n 上，利用(5.1.21)的类似式，便得

$$\begin{cases} dx=\sum_i \omega^i e_i, \\ de_i=\sum_j \omega_i^j e_j+\sum_{j,\alpha} h_{ij}^\alpha \omega^j e_\alpha, \\ de_\alpha=-\sum_{j,i} h_{ij}^\alpha \omega^j e_i+\sum_\beta \omega_\alpha^\beta e_\beta. \\ \quad (1\leqslant i,\ j,\ \cdots\leqslant n;\ n+1\leqslant \alpha,\ \beta\leqslant n+p) \end{cases} \tag{5.2.31}$$

现设M的余维$p=1$，即$M\to R^{n+1}$是超曲面. 在M上定义函数

$$S_f=\langle x,\ e_{n+1}\rangle,$$

称为M的支持函数. 若M的n个主曲率处处非零，则称M的Weingarten变换A是非蜕化的.

命题5.2.4 设$x:M\to R^{n+1}$是紧致连通的超曲面，则M为超球面的充要条件是支持函数为常数且Weingarten变换非蜕化.

证明 必要性是显然的，下证充分性.

局部选取$\{e_i\}$为M的主方向幺正标架，即

$$h_{ij}=\lambda_i\,\delta_{ij},$$

其中λ_i是M的主曲率. 由于

$$S_f=\langle x,\ e_{n+1}\rangle=\text{常数},$$

故
$$0=\langle dx,\ e_{n+1}\rangle+\langle x,\ de_{n+1}\rangle=\langle x,\ de_{n+1}\rangle.$$

利用(5.2.31)的第三式，上式化为

$$\sum_i \lambda_i\langle x,\ e_i\rangle\omega^i=0$$

即

$$\lambda_i\langle x,\ e_i\rangle=0.$$

由于$\lambda_i\neq 0$，故得$\langle x,\ e_i\rangle=0$，即位置向量x是M的法方向. 于是

$$d\langle x,\ x\rangle=2\langle dx,\ x\rangle=0.$$

即位置向量x的长度是定值. 因此M是R^{n+1}的超球面的一部分. 由于M紧致且连通，所以M本身就是整个超球面. ▮

用类似的方法，我们还可以证明下列定理.

定理 5.2.5 (Liebmann-Süss) 设 $x: M^n \to R^{n+1}$ 是紧致连通的定向超曲面，若 M 具有常平均曲率，且支持函数 S_f 在 M 上有固定符号（正或负），则 M 必是 n 维欧氏球面；其逆显然.

证明 设 x 是 M 的位置向量. 令 $S_i = \langle x, e_i\rangle$，则 $\sum\limits_i S_i e_i$ 是 M 上可微向量场. 计算这个向量场的散度，利用 (5.2.31) 易得

$$\sum_j S_{ij}\omega^j \xlongequal{\text{(def)}} dS_i - \sum_j S_j \omega_i^j = \sum_j (\delta_{ij} + S_f h_{ij})\omega^j,$$

故
$$\sum_i S_{ii} = n(1 + S_f \widetilde{H}),$$

其中
$$\widetilde{H} = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$$

是 M 的平均曲率，$\sum\limits_i S_{ii}$ 就是要求的散度. 上式两边积分，应用 Stokes 定理，就有

$$\int_M (1 + S_f \widetilde{H})^* 1 = 0. \tag{5.2.33}$$

再令
$$u_i = \sum_j h_{ij} S_j = \sum_j h_{ij}\langle x, e_j\rangle,$$

计算向量场 $\sum\limits_i u_i e_i$ 的散度：

$$\begin{aligned}
\sum_j u_{ij}\omega^j &\xlongequal{\text{(def.)}} du_i - \sum_j u_j \omega_i^j \\
&= \sum_j (dh_{ij}) S_j + \sum_j h_{ij}(dS_j) - \sum_j u_j \omega_i^j \\
&= \sum_j \Big(dh_{ij} - \sum_k h_{ik}\omega_j^k - \sum_k h_{kj}\omega_i^k\Big) S_j \\
&\quad + \sum_j h_{ij}\omega^j + \sum_{j,k} S_f h_{ik} h_{jk}\omega^j \\
&= \sum_j \Big(\sum_k h_{ikj} S_k + h_{ij} + \sum_k S_f h_{ik} h_{jk}\Big)\omega^j,
\end{aligned}$$

故
$$\sum_i u_{ii} = \sum_{k,i} S_k h_{iki} + n\widetilde{H} + S_f \sum_{i,j}(h_{ij})^2.$$

由 (5.2.9) 并注意到 $\widetilde{H} = \text{const.}$，上式化为

$$\sum_i u_{ii} = n\widetilde{H} + S_f\Big(\sum_{i,j} h_{ij}^2\Big).$$

两边积分，应用 Stokes 定理，就有

$$\int_M (n\widetilde{H}+S_f\sum_{i,j}h_{ij}^2)*1=0. \tag{5.2.34}$$

将(5.2.33)乘 $n\widetilde{H}$，减去(5.2.34)，便得

$$\int_M S_f(n\widetilde{H}-\sum_{i,j}h_{ij}^2)*1=0.$$

由于 S_f 在 M 上具有固定符号，故上式意味着

$$n\widetilde{H}-\sum_{i,j}h_{ij}^2=0.$$

若取 M 的主方向正交标架，使

$$h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij},$$

则有

$$\frac{1}{n}(\sum_i\lambda_i)^2=\sum_i(\lambda_i)^2.$$

可见只能 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda$. 根据定理 5.2.2 的推论，$\lambda=\text{const.}$，这样，(5.2.31)的第三式成为

$$de_{n+1}=-\lambda\sum_i\omega^ie_i.$$

考虑 R^{n+1} 的向量 $\lambda x+e_{n+1}$，易见

$$d(\lambda x+e_{n+1})=\lambda dx+de_{n+1}=0,$$

即 $\lambda x+e_{n+1}$ 是一个常向量. 令

$$\lambda x+e_{n+1}=a,$$

若 $\lambda=0$，则 M 是全测地超曲面，M 不可能是紧致的. 因此，$\lambda\neq0$，于是

$$x-\frac{a}{\lambda}=-\frac{1}{\lambda}e_{n+1},$$

即

$$\left|x-\frac{a}{\lambda}\right|=1/|\lambda|.$$

这表明 M 位于中心在 a/λ，半径为 $1/|\lambda|$ 的 n 维球面上. 由于 M 紧致连通，因此 M 本身就是这个 n 维球面. ▌

现设 $E_1,\cdots,E_{n+1}$ 是 R^{n+1} 的一个固定的正交规范标架(笛卡

儿坐标标架）．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的位置向量 x 可表示为

$$x=\sum_A x_A E_A.$$

于是，方程

$$x_{n+1}=F(x_1,\ \cdots,\ x_n) \tag{5.2.35}$$

确定了 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的一张超曲面，称为**非参数化超曲面**，也称为**图**．

令 $$p_i=\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad W=(1+\sum_i p_i^2)^{1/2}\geqslant 1.$$

超曲面(5.2.35)的单位法向量可取为

$$e_{n+1}=\frac{1}{W}(\sum_i p_i E_i-E_{n+1}).$$

于是，超曲面(5.2.35)的诱导度量 ds^2 及第二基本形式 h 分别是

$$\begin{aligned}ds^2&=\sum_A (dx_A)^2=\sum_i (dx_i)^2+(\sum_i p_i\,dx_i)^2\\&=\sum_{i,j} g_{ij}\,dx_i\,dx_j,\end{aligned}$$

其中

$$g_{ij}=\delta_{ij}+p_ip_j \quad 及 \quad g^{ij}=\delta_{ij}-\frac{1}{W^2}p_ip_j, \tag{5.2.36}$$

$$\begin{aligned}h&=-\langle dx,\ de_{n+1}\rangle\\&=-\left\langle \sum_i dx_i E_i+dF E_{n+1},\ \sum_i d\left(\frac{p_i}{W}\right)E_i-d\left(\frac{1}{W}\right)E_{n+1}\right\rangle\\&=-\sum_i (dx_i)d\left(\frac{p_i}{W}\right)+(dF)d\left(\frac{1}{W}\right)\\&=\sum_i\left(p_i\,d\left(\frac{1}{W}\right)-d\left(\frac{p_i}{W}\right)\right)dx_i\\&=-\frac{1}{W}\sum_i dp_i\,dx_i=-\frac{1}{W}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j,\end{aligned}$$

即

$$h_{ij}=-\frac{1}{W}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{5.2.37}$$

因此，

$$\operatorname{tr} h = g^{ij}h_{ij} = -\frac{1}{W}\left(\sum_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\frac{p_i}{W}\frac{p_j}{W}\right)$$

$$= -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p_i}{W}\right). \qquad (5.3.28)$$

若引入记号

$$\bar{\Delta} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

并记
$$\operatorname{tr} h = -n\widetilde{H},$$
则有

$$(1+|DF|^2)\bar{\Delta}F - \sum_{i,j}(D_iF)(D_jF)(D_{ij}F)$$

$$= n\widetilde{H}(1+|DF|^2)^{3/2}, \qquad (5.2.39)$$

其中
$$|DF|^2 = \sum_i (D_iF)^2 = \sum_i p_i^2.$$

方程(5.2.39)就是所谓平均曲率型方程.

于是，非参数化超曲面(5.2.35)为极小超曲面的充要条件是函数 F 满足

$$\sum_i D_i\{(1+|DF|^2)^{-1/2} D_iF\} = 0, \qquad (5.2.40)$$

这就是通常所谓的极小曲面方程.

定义 5.2.4 设M是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的超曲面，若M的第二基本形式在点 $P\in M$ 半有(有)定，则称 M 在 P 点是(严格)凸的. 若M 在每点都是(严格)凸的，则M称为(严格)凸超曲面.

在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中，M 在 P 点的切空间是一张 n 维切超平面，仍记为 $T_P(M)$. 当M在点 P(严格)凸时，在 P 附近 M(严格)地位于切超平面 $T_P(M)$ 的一侧. 事实上，对于点 $P\in M$，我们可选取 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的直角坐标系 $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$，使得 M 在 P 的法向量方向重合于 x_{n+1}-轴. 于是，在 P 的切空间 $T_P(M)$ 便由 $dx_{n+1}(P)=0$ 所确定. 在 P 附近，M 可局部地表示为非参数化形状(5.2.35). 因此，在 P 有 $dF(P)=0$，即 P 是 M 上函数 F 的临界点. 由

(5.2.37)知，当M的第二基本形式在P半有(有)定时，函数F在P达到局部极大(小)值．所以在P附近，M作为F的图，必(严格)位于$T_P(M)$的一侧．这样，一个(严格)凸超曲面总是可定向的．

定理 5.2.6 设M是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中紧致无边的连通的严格凸超曲面，若M的平均曲率为常数，则M必是超球面．

证明 对于$\boldsymbol{R}^{n+1}$的超曲面，方程(5.1.34)和(5.1.35)化为

$$R_{ijkl}=h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}, \tag{5.2.41}$$

$$h_{ijk}-h_{ikj}=0. \tag{5.2.42}$$

用Δ表示M上的Laplacian，则

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=\frac{1}{2}\Delta\left(\sum_{i,j}h_{ij}^2\right)=\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+\sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij}, \tag{5.2.43}$$

其中

$$\Delta h_{ij}=\sum_k h_{ijkk},$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega^l=dh_{ijk}-\sum_l h_{ljk}\omega_i^l-\sum_l h_{ilk}\omega_j^l-\sum_l h_{ijl}\omega_k^l.$$

利用(5.2.42)以及Ricci恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_k h_{ijkk}&=\sum_k h_{kijk}=\sum_k h_{kikj}+\sum_{k,l}h_{li}R_{lkjk}+\sum_{k,l}h_{kl}R_{lijk}\\&=\sum_k h_{kkij}+\sum_{k,l}(h_{li}R_{lkjk}+h_{kl}R_{lijk})\\&=\sum_{k,l}(h_{li}R_{lkjk}+h_{kl}R_{lijk}),\end{aligned}$$

这里最后一个等号是因为M的平均曲率为常数．

把它代入(5.2.43)，得

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+\sum_{i,j,k,l}h_{ij}(h_{li}R_{lkjk}+h_{kl}R_{lijk}). \tag{5.2.44}$$

在M上局部选取M的主方向么正标架场，使$h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$，其中$\lambda_i$为$M$的主曲率，则(5.2.44)的右边第二项化为

$$\sum_{i,k}\lambda_i^2 R_{ikik}+\sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k R_{kiik}$$

$$=\sum_{i,j}(\lambda_i^2-\lambda_i\lambda_j)R_{ijij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

因此,

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2 R_{ijij}. \tag{5.2.45}$$

由于 M 是严格凸的，故所有主曲率 λ_i 均非零同号. 此时(5.2.41)化为

$$R_{ijij}=\lambda_i\lambda_j>0 \quad (i\neq j). \tag{5.2.46}$$

这样,(5.2.45)的右边是非负的,即 $\|B\|^2$ 是 M 上的下调和函数. 根据定理 5.2.1 的推论 2, $\|B\|^2=$常数. 于是, (5.2.45)左边为零,因此右边的每一项均为零. 再利用(5.2.46), 可见 $\lambda_i=\lambda_j$, 即 M 为全脐点超曲面. 根据定理 5.2.2 的推论 2 以及 M 的紧致性, M 必是 R^{n+1} 的超球面(参考本节习题 2). ∎

根据(5.1.39), 若 M 具有常数平均曲率和常数纯量曲率, 则 $\|B\|^2=$常数. 因此,对应于定理 5.2.6 的一个局部性结果是

推论 1 R^{n+1} 中具有常数平均曲率和常数纯量曲率的严格凸超曲面必是超球面的一部分.

定理 5.2.6 可看作古典的 Liebmann 定理的高维推广. 最近 A. Ros 证得: 设 M 是 R^{n+1} 中紧致无边界的连通的嵌入超曲面,若 M 的纯量曲率为常数,则 M 必是超球面(见习题 9). 这是一个有趣的结果.

习 题

1. 设 $M\to\overline{M}^{n+1}$ 为全测地超曲面, 证明 M 的单位法向量场关于 $\overline{M}^{n+1}$ 的黎曼联络 $\overline{\nabla}$ 是平行的.

2. 设 $M\to R^{n+1}$ 是欧氏空间的完备连通超曲面, 若 M 是全脐点的, 则 M 或是全测地的超平面, 或是 n 维超球面.

(参考 Kobayashi & Nomizu, "Found. of Diff. Geom.", Vol. II, p.30)

3. 设 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$ 是常曲率 $\bar{c}$ 的黎曼流形, $M\to\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$ 是连通完备的 Eeinstein 超曲面, $n\geqslant4$

(i) 若 $\bar{c}=0$, 则M的纯量曲率是非负的,这时M或是超平面,或是超球面.

(ii) 若 $\bar{c}\neq0$, 且M不是常曲率的,则

$$M^n=S^{l_1}(c_1)\times S^{l_2}(c_2),\ l_1+l_2=n,$$

$$c_1=\frac{n-2}{l_1-1}\bar{c},\quad c_2=\frac{n-2}{l_2-1}\bar{c},$$

其中 $S^{l_i}(c_i)$, $i=1,2$, 均为常曲率流形,且在 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$ 中是全脐点的.

4. 设 $M^n(n\geqslant4)$ 是常曲率空间的超曲面. 试证: M^n 为局部共形平坦黎曼流形的充要条件是 M^n 至少有 $n-1$ 个主曲率相等。

5. 设M是 R^{n+1} 的连通完备超曲面, $n\geqslant3$. 若M具有常数截面曲率 k, 则 k 是非负的,因而M或是超平面,或是超球面.

6. 设 S^{n+1} 是 $n+1$ 维单位球面, M 是 S^{n+1} 的紧致无边的连通超曲面, 若M的平均曲率为常数且M的截面曲率非负, 则M或是 n 维球面, 或是两个低维球面的乘积.

[提示] 参考 Nomizu & Smyth, J.Diff.Geom., 3(1969), 367—377.

7. 设 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$是常曲率 $\bar{c}$ 的空间形式, M 是 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$的紧致无边的连通浸入超曲面,它的纯量曲率为常数.

(i) 若 $\bar{c}\geqslant0$ 且M的 Ricci 曲率不小于$(n-1)\bar{c}$; 或者

(ii) 若 $\bar{c}<0$ 且M的截面曲率为正,则M是全脐点的超球面.

[提示] 参考 S.T.Yau, Amer.J.Math., 97(1975), 76—100; 以及沈一兵, Proc.Symp.DD2, 341—353.

8. 设 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$是常曲率 $\bar{c}$ 的空间形式, M是 $\bar{M}^{n+1}(\bar{c})$的 $n(\geqslant4)$ 维完备连通的超曲面,若M的第二基本形式平行,则M或是 n 维空间形式,或是两个低维的空间形式的乘积。

9. 设M是 R^{n+1} 中紧致无边的连通的嵌入超曲面,若M的纯量曲率为常数,则M必是标准超球面.

[提示] 参考 A.Ros, J.Diff.Geom., 27(1988), No2, 215—220.

10. 记 $R^{n+2}=R^{r+1}\times R^{s+1}$, $r+s=n$. R^{n+2} 中任何向量 ξ 可唯一地分解

为 $\xi=\xi_1+\xi_2$，其中 $\xi_1\in\boldsymbol{R}^{r+1}$，$\xi_2\in\boldsymbol{R}^{s+1}$。对于另一向量 $\eta=\eta_1+\eta_2$，欧氏内积可分解为：$\langle\xi, \eta\rangle=\langle\xi_1, \eta_1\rangle+\langle\xi_2, \eta_2\rangle$。设 $M\to S^{n+1}\subset\boldsymbol{R}^{n+2}$ 是等距浸入单位球面 S^{n+1} 中的超曲面，则 M 在 $\boldsymbol{R}^{n+2}$ 中的位置向量 X 可分解为

$$X=a_1\xi_1+a_2\xi_2,\quad a_1^2+a_2^2=1,$$

其中 $\xi_1\in\boldsymbol{R}^{r+1}$ 和 $\xi_2\in\boldsymbol{R}^{s+1}$ 都是单位向量。试证：M 作为 S^{n+1} 的超曲面，

(i) M 的单位法向量可表为 $e_{n+1}=-a_2\xi_1+a_1\xi_2$；

(ii) M 的第二基本形式是

$$-\langle dX, de_{n+1}\rangle=a_1a_2(\langle d\xi_1, d\xi_1\rangle-\langle d\xi_2, d\xi_2\rangle);$$

(iii) M 的诱导度量是

$$ds_M^2=a_1^2|d\xi_1|^2+a_2^2|d\xi_2|^2;$$

(iv) M 为极小超曲面的充要条件是

$$\frac{r}{s}=\frac{a_1^2}{a_2^2},$$

它称为 Clifford 极小超曲面.

§3 极小子流形

3.1 体积的变分

设 M 和 $\overline{M}$ 分别是 n 和 $n+p$ 维黎曼流形，$f:M\to\overline{M}$ 是等距浸入。正如本章 §1.3 所述，在么正标架场下，M 的体积元 $dv_M=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$。若 M 是紧致的(可能有光滑边界 ∂M)，则 M 的体积是

$$V_M=\int_M dv_M=\int_M\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n.$$

现考虑 M 的变分如下：设 $I=(-\varepsilon, \varepsilon)$，$\varepsilon>0$ 为某实数，并设 $F:M\times I\to\overline{M}$ 为一可微映射，使得对任何 $t\in I$，F 限制在 $M\times\{t\}$ 上是一个浸入，并且 $F(P, 0)=f(P)$，$\forall P\in M$。写着 $f_t=F|_{M\times\{t\}}$，即 $f_t(P)=F(P, t)$，从而 $f_0=f$。于是，$\{f_t\}$ 称为 f 的一个变分.

在流形 $M\times I$ 上，考虑么正标架场 $e_A(P, t)$，使得对每个固

定的 $t\in I$, $e_i(P,t)$ 与 $f_t(M)$ 相切，而 $e_\alpha(P,t)$ 为法向量. 这样，当 $\overline{M}$ 的形式 θ^A, θ_B^A 限制在 $f_t(M)$ 上时，它们可表达为

$$\begin{aligned}&\theta^i=\omega^i+a^i dt,\ \theta^\alpha=a_\alpha dt,\\&\theta_i^\alpha=\omega_i^\alpha+a_i^\alpha dt,\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

其中 ω^i 和 ω_i^α 是M上的 1-形式，其系数可能与 t 有关. 特别当 $t=0$ 时，这些形式就化为M上原来的微分形式. 向量 $(\sum_A a^A e_A)|_{t=0}$ 称为M的形变向量，有时也称为变分向量.

在流形 $M\times I$ 上，算子 d 可写为

$$d=d_M+dt\frac{\partial}{\partial t},\tag{5.3.2}$$

其中 d_M 表示M上的外微分算子. 在 $M\times I$ 上，我们可得

$$d(\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n)=\sum_\alpha\theta^\alpha\wedge\Omega_\alpha,\tag{5.3.3}$$

其中

$$\Omega_\alpha=-\sum_i\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^{i-1}\wedge\theta_i^\alpha\wedge\theta^{i+1}\wedge\cdots\wedge\theta^n.\tag{5.3.4}$$

将(5.3.1)代入(5.3.3)，我们看到

$$\begin{aligned}\text{左边}=d\{&\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n+dt\wedge\sum_i(-1)^{i-1}a^i\omega^1\wedge\cdots\\&\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n\},\end{aligned}$$

$$\text{右边}=dt\wedge\sum_\alpha a^\alpha\widetilde{\Theta}_\alpha,$$

其中 $$\widetilde{\Theta}_\alpha=-\sum_i\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega_i^\alpha\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n.\tag{5.3.5}$$

比较左右两边 dt 项的系数，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n)\\&=d_M\{\sum_i(-1)^{i-1}a^i\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n\}\\&\quad+\sum_\alpha a^\alpha\widetilde{\Theta}_\alpha.\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

在M上积分上式并令 $t=0$，便得体积的第一变分公式为

$$V'_M(0)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_M \omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\right)\bigg|_{t=0}$$

$$=\int_M\sum_\alpha a^\alpha\,\widetilde{\Theta}_\alpha+\int_{\partial M}\sum_i(-1)^{i-1}a^i\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n, \tag{5.3.7}$$

这里最后两个积分中被积量取 $t=0$ 的值.

若对于 $P\in\partial M$, $a^i(P,0)=0$, 换言之, 形变向量沿边界 ∂M 正交于 M(法向变分), 则(5.3.7)的最后第二项消失. 当然, 若变分保持边界 ∂M 不动, 则此条件自然满足. 关于这样的变分, 我们就有

$$V'_t(0)=-\int_M\sum_\alpha a^\alpha\left(\sum_i h^\alpha_{ii}\right)dv_M, \tag{5.3.7'}$$

这里已把(5.1.21)代入 $t=0$ 时的(5.3.5). 由此可见, 对任意的 a^α, 第一变分等于零的充要条件是 $\sum_i h^\alpha_{ii}=0$, 即 M 的平均曲率向量 H(见(5.1.28))恒消失. 因此, 我们有

定理 5.3.1 黎曼流形的极小子流形的局部特征是: 其上任意紧致区域的体积, 在保持区域边界固定的形变下, 取到临界值(即一阶变分为零).

如所知, 一阶变分为零的极小子流形, 其体积未必真正达到极小. 对此, 还要考虑其体积的二阶变分, 即在条件 $H=0$ 下, 计算

$$V''_M(0)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_M\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\right)\bigg|_{t=0}.$$

为此, 我们先对(5.3.4)外微分, 利用结构方程, 得

$$-d\Omega_\alpha=-\sum_{i,\beta}\sum_{j\neq i}\theta^\beta\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^{j-1}\wedge\theta^\beta_j\wedge\theta^{j+1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i-1}\wedge\theta^\alpha_i\wedge\theta^{i+1}\wedge\cdots\wedge\theta^n$$

$$+\sum_\beta\theta^\beta_\alpha\wedge\Omega_\beta+\sum_\beta\widetilde{K}_{\alpha\beta}\theta^\beta\wedge\theta^1\wedge\cdots\wedge\theta^n$$

$$+(\text{包含 }\omega^\beta,\ \omega^\gamma\text{ 的二次项}), \tag{5.3.8}$$

其中已置

$$\widehat{K}_{\alpha\beta}=\sum_i K_{\alpha i\beta i}, \tag{5.3.9}$$

它由外围流形 $\overline{M}$ 的曲率张量 K_{ABCD} 所确定.

另一方面,把(5.3.1)代入(5.3.4),我们有

$$\Omega_\alpha=\widetilde{\Theta}_\alpha+dt\wedge\Phi_\alpha, \tag{5.3.10}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha=&\sum_i(-1)^i a_i^\alpha\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&+\sum_i\sum_{j\neq i}(-1)^j a^j\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{j-1}\wedge\omega^{j+1}\wedge\cdots\\&\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega_i^\alpha\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n.\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

对(5.3.10)外微分,

$$d\Omega_\alpha=d_M\widetilde{\Theta}_\alpha+dt\wedge\frac{\partial\widetilde{\Theta}_\alpha}{\partial t}-dt\wedge d_M\Phi_\alpha. \tag{5.3.12}$$

把(5.3.1)代入(5.3.8),得

$$-d\Omega_\alpha=-dt\wedge\left(\sum_\beta\theta_\alpha^\beta\wedge\Phi_\beta+\Psi_\alpha\right)+\text{其他项}, \tag{5.3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha=&-\sum_\beta\widehat{K}_{\alpha\beta}a^\beta\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\\&+\sum_{i,\beta}\sum_{j\neq i}a^\beta\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{j-1}\wedge\omega_j^\beta\wedge\omega^{j+1}\wedge\cdots\\&\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega_i^\alpha\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n.\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

把(5.3.12)代入(5.3.13),比较含 dt 项的系数,得

$$\frac{\partial\widetilde{\Theta}_\alpha}{\partial t}=d_M\Phi_\alpha+\sum_\beta\theta_\beta^\alpha\wedge\Phi_\beta+\Psi_\alpha. \tag{5.3.15}$$

现对(5.3.1)的第二式外微分,利用结构方程和(5.3.1),可得

$$d_M a^\alpha=-\sum_\beta a^\beta\theta_\beta^\alpha-\sum_i(a^i\omega_i^\alpha-a_i^\alpha\omega^i). \tag{5.3.16}$$

利用(5.3.15)和(5.3.16),就可计算

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_\alpha a^\alpha\tilde{\Theta}_\alpha\right)=\sum_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}\tilde{\Theta}_\alpha+\sum_\alpha a^\alpha\frac{\partial\tilde{\Theta}_\alpha}{\partial t}$$

$$=\sum_\alpha\frac{\partial a^\alpha}{\partial t}\tilde{\Theta}_\alpha+d_M\left(\sum_\alpha a^\alpha\Phi_\alpha\right)+\sum_\alpha a^\alpha\Psi_\alpha$$

$$+\sum_{i,\alpha}(a^i\omega_i^\alpha-a_i^\alpha\omega^i)\wedge\Phi_\alpha. \qquad (5.3.17)$$

当$H=0$时，$\tilde{\Theta}_v|_{t=0}=0$. 因此，对(5.3.6)求导，利用(5.3.17)，再令$t=0$，最后可得

$$V''_M(0)=\int_{\partial M}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sum_i(-1)^{i-1}a^i\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n+\sum_\alpha a^\alpha\Phi_\alpha\right\}$$

$$+\int_M\left\{\sum_{i,\alpha}(a^i\omega_i^\alpha-a_i^\alpha\omega^i)\wedge\Phi_\alpha+\sum_\alpha a^\alpha\Psi_\alpha\right\}. \qquad (5.3.18)$$

假定变分向量是M的法向量，且边界∂M固定不动，则

$$a^i=0,\qquad a^\alpha(P,0)=0,\qquad \forall P\in\partial M.$$

于是，$t=0$时有

$$\Phi_\alpha=\sum_i a_i^\alpha\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^{i-1}\wedge\omega^{i+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n,$$

$$\sum_\alpha a^\alpha\Psi_\alpha=-\sum_{\alpha,\beta}(\bar{K}_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta})a^\alpha a^\beta dv_M,$$

其中

$$\sigma_{\alpha\beta}=\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta. \qquad (5.3.19)$$

将这些式子代入(5.3.18)，极小子流形的体积的第二变分公式成为

$$V''_M(0)=\int_M\left\{\sum_{i,\alpha}(a_i^\alpha)^2-\sum_{\alpha,\beta}(\bar{K}_{\alpha\beta}+\sigma_{\alpha\beta})a^\alpha a^\beta\right\}dv_M. \qquad (5.3.20)$$

从(5.3.16)可见，在M上(即$t=0$)有

$$\sum_i a_i^\alpha\omega^i=da^\alpha+\sum a^\beta\omega_\beta^\alpha.$$

这表明a_i^α是形变向量$A=\sum_\alpha a^\alpha e_\alpha$的共变导数的分量. 它的二阶

共变导数的分量 a^α_{ij} 定义为

$$\sum_j a^\alpha{}_{ij}\omega^j = da^\alpha_i - \sum_j a^\alpha_j\omega^j_i + \sum_\beta a^\beta_i\omega^\alpha_\beta.$$

于是，a^α 的 LaplacianΔa^α 是

$$\Delta a^\alpha = \sum_i a^\alpha_{ii}.$$

定义M法丛上的内积为

$$\langle A,\ \Delta A\rangle = \sum_\alpha a^\alpha \Delta a^\alpha.$$

直接计算可验证

$$d\Big(\sum_{i,\alpha} a^\alpha a^\alpha_i *\omega^i\Big) = \Big(\sum_{i,\alpha}(a^\alpha_i)^2 + \langle A,\ \Delta A\rangle\Big)dv_M. \tag{5.3.21}$$

因此，$\int_M \{\sum_{i,\alpha}(a^\alpha_i)^2 + \langle A,\ \Delta A\rangle\}\,dv_M = \int_{\partial M}\sum_{i,\alpha} a^\alpha a^\alpha_i *\omega^i = 0,$

其中最后的等号是根据边界 ∂M 的固定性.

引入椭圆算子

$$La^\alpha = -\Delta a^\alpha - \sum_\beta(\widetilde{K}_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta})a^\beta, \tag{5.3.22}$$

则第二变分公式(5.3.20)可改写为

$$V''_M(0) = \int_M \langle LA,\ A\rangle dv_M. \tag{5.3.20'}$$

对于法向量场 $A = \sum_\alpha a^\alpha e_\alpha$ 和 $B = \sum_\alpha b^\alpha e_\alpha$, 它们满足

$$A|_{\partial M} = B|_{\partial M} = 0,$$

定义指标形式

$$I_f(A,\ B) = \int_M \langle LA,\ B\rangle dv_M. \tag{5.3.23}$$

因为 $\{\langle\Delta A,\ B\rangle - \langle A,\ \Delta B\rangle\}dv_M = d\{\sum_{i,\alpha}(a^\alpha_i b^\alpha - b^\alpha_i a^\alpha)*\omega^i\}$,

故 $$I_f(A,\ B) = I_f(B,\ A),$$

即指标形式(5.3.23)是对称的. 利用(5.3.23)，第二变分公式就成为

$$V''_M(0) = I_f(A,\ A). \tag{5.3.20''}$$

定义法向量场 A 和 B 的整体内积为

$$(A,\ B)=\int_M\langle A,\ B\rangle dv_M=\int_M\left(\sum_\alpha a^\alpha b^\alpha\right)dv_M.$$

这样，根据强椭圆算子的理论，我们有

定理 5.3.2 设 $C_0^\infty(T^\perp M)$ 表示 M 的法丛中所有光滑截面的空间，它们在边界 ∂M 上恒为零. 指标形式(5.3.23)是 $C_0^\infty(T^\perp M)$ 上的对称双线性形式，它关于整体内积可对角化，并且具有离散的实特征值：

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots\to\infty.$$

每个特征值所对应的特征空间是有限维的.

定义 5.3.1 对应于负特征值的特征空间的维数之和称为极小子流形 M 的指数. 特征值为 0 所对应的特征空间的维数称为 M 的零数.

易见，全测地子流形 $S^n\to S^{n+p}$ 的指数为 p; 零数为 $p(n+1)$.

特别是 $n=1$, 即测地线的情况，我们有 $\sigma_{\alpha\beta}=0$; 这时算子(5.3.22)化为

$$La^\alpha=-\triangle a^\alpha-\sum_\beta\bar{K}_{\alpha\beta}a^\beta.$$

整体微分几何的许多定理(如 Myers 定理，Synge 定理，Morse 指数定理等)均盖源于此算子.

定义 5.3.2 若极小子流形 M 的指数为 0, 则称 M 是稳定的；否则称为不稳定的. 这时对应的极小浸入 $f: M\to\bar{M}$ 也称为稳定(或不稳定)的.

由定义，对于稳定的极小子流形 M, 其第二变分恒非负，即 $V''_M(0)\geqslant0$; 反之，若存在一个变分向量 $A\in C_0^\infty(T^\perp M)$, 使 $I_f(A,A)<0$, 则 M 是不稳定的.

注 如果 M 是非紧致的，则就取具有紧致支集的法向变分向量. 于是，上面的讨论仍然适用. 因此，可同样地定义 M 的稳定性.

3.2 欧氏空间的极小子流形

本节考虑外围流形$\overline{M}$为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的情况. 如本章§2.3开头所述, 用 $x:M\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 表示M的等距浸入, 而M在 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 中的位置向量也用 x 表示.

设 $a=\sum_A a^A e_A$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的一个常向量, 定义M关于 a 的高度函数

$$\varphi=\langle a,\ x\rangle.$$

于是, 利用(5.2.31)就有

$$\sum_i \varphi_i\omega^i=d\varphi=\langle a,\ dx\rangle=\sum_i a^i\omega^i,\quad \varphi_i=a^i;$$

$$\sum_j \varphi_{ij}\omega^j=D\varphi_i=d\varphi_i-\sum_j\varphi_j\omega_j^i=\sum_{\alpha,j} a^\alpha h_{ij}^\alpha\omega^j,$$

从而M上函数 φ 的 Laplacian 为

$$\Delta\varphi=\sum_i \varphi_{ii}=\sum_{\alpha,i} h_{ii}^\alpha a^\alpha=n\langle a,\ H\rangle,$$

其中

$$H=\frac{1}{n}\sum_{\alpha,i} h_{ii}^\alpha e_\alpha$$

是 $M\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的平均曲率向量. 由此得

命题 5.3.3 欧氏空间中等距浸入子流形M为极小的充要条件是M的位置向量的坐标分量都为M上的调和函数.

根据 Hopf 极大原理, 便得

推论 欧氏空间中不存在紧致无边的极小子流形.

从(5.1.38)及极小性, $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 中极小子流形M的 Ricci 张量为

$$R_{ij}=-\sum_{\alpha,k} h_{ik}^\alpha h_{kj}^\alpha;$$

其纯量曲率为

$$\rho=-\|B\|^2.$$

因此，M的 Ricci 张量是半负定的．尤其是，M的纯量曲率为零的充要条件是M为全测地子空间．这些都是欧氏空间中极小子流形的内蕴必要条件．

关于 $\boldsymbol{R}^3$ 中极小曲面的研究，早期集中于下面的所谓 Plateau 问题：在 $\boldsymbol{R}^3$ 中给定一条可求长的闭 Jordan 曲线 Γ，能否找到一张以 Γ 为边界的极小曲面？这个问题由 Rado 及 Douglas (1931 年)在广义解的范围内得到解决．这里可能存在孤立的分支点，在分支点处曲面不是浸入．直到 1970 年，才由 Osserman 证明了上述广义解是处处内部正则的，即不会有分支点．后来丘成桐(S. T. Yau)等又解决了何时浸入变为嵌入的问题．

除了这类存在性问题外，还有不少属于唯一性方面的问题．其中最著名的是 Bernstein 定理：$\boldsymbol{R}^3$ 中完备的非参数化极小曲面(极小图)必是平面(参考[14])．Bernstein 问题的高维推广是：极小曲面方程(5.2.40)的整体解 F(即对一切 x_1, …, x_m 都有定义)是否是线性函数？这个问题的肯定回答情况如下：$n=3$ 由 de Giorgi(1965 年)证得；$n=4$ 由 Almgren(1966 年)证得；$n\leqslant 7$ 由 Simons(1967 年)证得(参考[11])．令人吃惊的是，当 $n\geqslant 8$ 时，问题的回答是否定的．这是由 Bombieri, de Giorgi 和 Giusti 在 1969 年联合得到的[参考 Inv. Math., 7(1969), 243—268]．

非参数化极小超曲面的一个值得注意的性质是

命题 5.3.4 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中由(5.2.35)确定的极小超曲面是稳定的．

证明 对于极小超曲面 M，第二变分公式(5.3.20)可写成

$$V''_M(0)=\int_M\{|\nabla\varphi|^2-\varphi^2\|B\|\}dv_M, \qquad (5.3.24)$$

其中 ∇ 表示M上联络，φ 是M上具有紧致支集的可微函数．

另一方面，超曲面(5.2.35)的单位法向量是(见 § 2.3)

$$e_{n+1}=\frac{1}{W}\left(\sum_i p_iE_i-E_{n+1}\right).$$

因此，
$$\langle E_{n+1},\ e_{n+1}\rangle=-\frac{1}{W}.$$

利用 (5.2.31) 及 M 的极小性，可直接计算 $\langle E_{n+1},\ e_{n+1}\rangle$ 的 Laplacian 为

$$\Delta(\langle E_{n+1},\ e_{n+1}\rangle)=-\|B\|^2\langle E_{n+1},\ e_{n+1}\rangle, \tag{5.3.25}$$

即
$$\|B\|^2=-W\Delta\left(\frac{1}{W}\right).$$

把它代入(5.3.24)，得

$$V_M''(0)=\int_M\left\{|\nabla\varphi|^2+\varphi^2W\Delta\left(\frac{1}{W}\right)\right\}dv_M. \tag{5.3.26}$$

考虑M上向量场 $\varphi^2W\nabla\left(\frac{1}{W}\right)$，它在$M$上具有紧致支集. 由 Stokes 定理，得

$$\begin{aligned}0&=\int_M\operatorname{div}\left(\varphi^2W\nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right)dv_M\\&=\int_M\varphi^2W\Delta\left(\frac{1}{W}\right)dv_M+\int_M\left\langle\nabla(\varphi^2W),\ \nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right\rangle dv_M,\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}&\int_M\varphi^2W\Delta\left(\frac{1}{W}\right)dv_M\\&=-\int_M\left\langle\nabla(\varphi^2W),\ \nabla\left(\frac{1}{W}\right)\right\rangle dv_M\\&=\int_M\left\{\frac{\varphi^2}{W^2}|\nabla W|^2+2\frac{\varphi}{W}\langle\nabla\varphi,\ \nabla W\rangle\right\}dv_M.\end{aligned}$$

代入(5.3.26)并令 $\psi=\varphi W$，最后就得

$$V_M''(0)=\int_M\frac{1}{W^2}|\nabla\psi|^2\,dv_M\geqslant0.$$

由于 φ 的任意性，命题得证. ▌

基于这个命题，Bernstein 定理的一种自然推广是：R^3 中完

备的稳定极小曲面是平面. 这个结果已被 Fischer-Colbrie 和 Schoen(1979 年)联合证实. 稍后, do Carmo 和彭家贵一起也予以独立证明[参考 Bull. AMS, (N. S.)1(1979), 903—906]. 但是,这个命题在高维($3\leqslant n\leqslant 7$)的推广至今尚未获解.

3.3 球面上的极小子流形

设 $S^{n+p}(c)=\left\{x\in \boldsymbol{R}^{n+p+1}\,|x|^2=\frac{1}{c},\ c>0\right\}$是常曲率 c 的$n+p$ 维标准欧氏球面. 据第三章§2.1 的例 1, $S^{n+p}(c)$ 的结构方程为

$$\begin{cases} dx=\sum\theta^A e_A, \\ de_A=\sum\theta_A^B e_B-c\theta^A x, \end{cases} \tag{5.3.27}$$

其中 $\{e_A\}$ 为 $S^{n+p}(c)$ 的切标架场, $e_{n+p+1}=\sqrt{c}\,x$ 为它的单位法向量场.

现设 $x:M\to S^{n+p}(c)\subset \boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 是 n 维黎曼流形 M 到球面 $S^{n+p}(c)$的等距浸入,我们用同一字母 x 表示M在 $\boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 中的位置向量. 选取局部么正标架场 $\{e_A\}$, 使得限制在M上时, 向量 $\{e_i\}$ 与M相切, $\{e_\alpha\}$ 为M的法向量场. 于是, 当(5.3.27)限制在M上时,利用(5.1.20)和(6.1.21),类似于(5.2.31)我们有

$$\begin{cases} dx=\sum\limits_i\omega^i e_i, \\ de_i=\sum\limits_j\omega_i^j e_j+\sum\limits_{j,\alpha}h_{ij}^\alpha\omega^j e_\alpha-c\omega^i x, \\ de_\alpha=-\sum\limits_{i,j}h_{ij}^\alpha\omega^i e_j+\sum\limits_\beta\omega_\alpha^\beta e_\beta. \end{cases} \tag{5.3.28}$$

我们要计算M的位置向量 x 的 Laplacian Δx. 令

$$dx=\sum_i x_i\omega^i,$$

比较(5.3.28)的第一式,可见

$$x_i=e_i.$$

利用(5.3.28)的第二式，有

$$\sum_j x_{ij}\omega^j = Dx_i = dx_i - \sum_j x_j\omega_i^j = de_i - \sum_j e_j\omega_i^j$$
$$= \sum_{j,\alpha} h_{ij}^\alpha e_\alpha \omega^j - cx\omega^i.$$

由此，

$$x_{ij} = \sum_\alpha h_{ij}^\alpha e_\alpha - cx\delta_{ij},$$
$$\Delta x = \sum_i x_{ii} = nH - ncx, \qquad (5.3.29)$$

其中H是M在$S^{n+p}(c)$中的平均曲率向量．这样，我们就证明了下列定理．

定理 5.3.5(Takahashi, 1966)　等距浸入子流形 $x: M \to S^{n+p}(c) \subset \boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 为极小子流形的充要条件是 M 的位置向量 x 满足

$$\Delta x + ncx = 0. \qquad (5.3.30)$$

这是关于球面上极小子流形的一个重要结果，它有许多应用．

推论 1　设M是球面$S^{n+p}(c)$的n维紧致极小子流形，则M上 Laplacian 的第一特征值$\lambda_1(M) \leqslant nc$．

在球面上，紧致无边界的极小子流形是存在的．除了全测地的球面外，我们有下列例子．

例 1　Clifford 极小超曲面(见本章§2，习题 10)．

例 2　Veronese 曲面．

设(x, y, z)是$\boldsymbol{R}^3$的直角坐标，单位球面S^2的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

设$(u_1, u_2, \cdots, u_5)$是$\boldsymbol{R}^5$的直角坐标，考虑下列映射

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{3}\,xy, \quad u_2 = \sqrt{3}\,xz, \quad u_3 = \sqrt{3}\,yz, \\ u_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2), \quad u_5 = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2). \end{cases} \qquad (5.3.31)$$

直接计算可验证

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} u_i^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^{5} (du_i)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{cases} \tag{5.3.32}$$

因此，映射(5.3.31)定义了 $S^2 \to S^4$ 的等距浸入. 应用定理 5.3.5，可以验证这是极小浸入. 由于(5.3.31)是二次齐式，故映射是二对一的，即这是实射影平面到 S^4 的极小嵌入. 这个曲面称为 Veronese 曲面.

例 3 球面到球面的标准极小嵌入.

设 $S^n(c)$ 是常曲率 c 的 n 维球面，若存在极小浸入 $x: S^n(c) \to S^m(1) \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$，则由定理 5.3.5，$n$ 是 $S^n(c)$ 上 Laplacian 的特征值. 然而，$S^n(c)$ 的 Laplacian 特征值为 $k(k+n-1)c$，其中 k 为自然数，故必有

$$c = c_k = n/k(k+n-1). \tag{5.3.33}$$

因为对应于特征值 $k(k+n-1)c$ 的特征空间的维数是

$$m_k = (2k+n-1)(k+n-2)!/k!(n-1)!. \tag{5.3.34}$$

因此 $S^m(1)$ 的维数 $m < m_k$. M. do Carmo 和 R. N. Wallach 得到了球面 $S^n(c_k)$ 到球面 $S^{m_k}(1)$ 的标准极小嵌入，其中 c_k 和 m_k 由 (5.3.33) 和 (5.3.34) 表示. [参考 Ann. of Math., 93(1971), 43—62.]

例 4 齐性极小超曲面.

项武义(W. Y. Hsiang)发现：当一个闭的等距群作用在紧致黎曼流形 $\overline{M}$ 上时，其最大轨道是 $\overline{M}$ 的极小子流形 [Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 56(1966), 5—6.]. 于是，他和 H. B. Lawson 一起，把运动群 $SO(n+2)$ 作用在 $S^{n+1}(1)$ 上，得到了作为 $SO(n+2)$ 的子群的轨道在 $S^{n+1}(1)$ 中实现的各种齐性紧致极小超曲面，详见 J. Diff. Geom., 5(1971), 1—38.

关于这些极小子流形的稳定性，有下列定理.

定理5.3.6 球面上任何紧致无边的极小子流形都是不稳定的.

证明 设 $x:M\to S^{n+p}(c)\subset \boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 是紧致无边极小子流形. 这时由(5.3.9)定义的 $\widetilde{K}_{\alpha\beta}$ 为

$$\widetilde{K}_{\alpha\beta}=nc\delta_{\alpha\beta}.$$

于是，第二变分公式(5.3.20′)可写成

$$V''_M(0)=-\int_M\{\sum_\alpha a^\alpha(\Delta a^\alpha+nca^\alpha)+\sum_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta\}dv_M.$$

(5.3.35)

令 a 是 $\boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 的常向量，作形变向量

$$\sum_\alpha a^\alpha e_\alpha=\sum_\alpha\langle a,\ e_\alpha\rangle e_\alpha,$$

即向量 a 在M的法空间上的投影. 我们要计算 Laplacian $\Delta a^\alpha=\Delta\langle a,\ e_\alpha\rangle$. 记$a^i=\langle a,\ e_i\rangle$，利用(5.3.28)，得

$$\sum_i a^\alpha_i\omega^i=da^\alpha+\sum_\beta a^\beta\omega^\alpha_\beta=-\sum_{i,j}h^\alpha_{ij}a^j\omega^i,$$

即

$$a^\alpha_i=-\sum_j h^\alpha_{ij}a^j.$$

$$\begin{aligned}\sum_j a^\alpha_{ij}\omega^j&=da^\alpha_i-\sum_j a^\alpha_j\omega^j_i+\sum_\beta a^\beta_i\omega^\alpha_\beta\\&=-\sum_{k,j}h^\alpha_{ikj}a^k\omega^j-\sum_{\beta,k,j}h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj}a^\beta\omega^j-c\sum_j h^\alpha_{ij}\langle a,\ x\rangle\omega^j,\end{aligned}$$

即

$$a^\alpha_{ij}=-\sum_k h^\alpha_{ikj}a^k-\sum_{\beta,k}h^\alpha_{ik}h^\beta_{kj}a^\beta-ch^\alpha_{ij}\langle a,\ x\rangle.$$

利用(5.3.19)和M的极小性，注意到(5.1.35)，就有

$$\Delta a^\alpha=\sum_i a^\alpha_{ii}=-\sum_\beta a^\beta\sigma_{\alpha\beta},$$

从而，(5.3.35)化为

$$V''_M(0)=-nc\int_M\sum_\alpha(a^\alpha)^2dv_M<0.$$

因此，M是不稳定的. ▌

注 事实上，可以证明，对于定理5.3.6的极小子流形 $M\to S^{n+p}(c)$，它的指数 $\mathrm{Ind}(M)\geqslant p=\mathrm{codim}\,M$；零数 $\mathrm{Nul}(M)\geqslant p(n+1)$，其中任一不等式的等号成立当且仅当 M 为全测地的嵌入子流形(见[11])。

3.4 Simons不等式

由(5.1.39)，在常曲率空间中，极小子流形 M 的第二基本形式的长度平方 $\|B\|^2$ 仅与 M 的纯量曲率 ρ 有关，因而是 M 的一个内蕴量。我们要计算 $\|B\|^2$ 的 Laplacian。因为

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)=\sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2+\sum_{\alpha,i,j}h^\alpha_{ij}\Delta h^\alpha_{ij},\qquad(5.3.36)$$

所以主要计算 Δh^α_{ij}。

若一个黎曼流形的曲率张量是平行的，则称之为**局部对称空间**。显然，常曲率空间是局部对称的。我们先设极小子流形 M 的外围流形 $\overline{M}$ 是局部对称的，即在幺正标架场下，$\overline{M}$ 的曲率张量 K^A_{BCD} 满足

$$K^A_{BCD;E}=0,\qquad(5.3.37)$$

其中"；"表示关于 $\overline{M}$ 的黎曼联络 $\overline{\nabla}$ 的共变微分(见第三章，§2.2)

另一方面，当限制在 M 上时，类似于(5.1.25)的定义，K^α_{ijk} 的共变导数 K^α_{ijkl} 为

$$\sum_l K^\alpha_{ijkl}\omega^l=dK^\alpha_{ijk}-\sum_m K^\alpha_{mjk}\omega^m_i-\sum_m K^\alpha_{imk}\omega^m_j$$
$$-\sum_m K^\alpha_{ijm}\omega^m_k+\sum_\beta K^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta.$$

这个共变导数不同于把 $K^A_{BCD;E}$ 限制在 M 上而得的 $K^\alpha_{ijk;l}$。由定义(5.1.21)和(5.1.25)，它们之间的关系是

$$K^{\alpha}_{ijk;l}=K^{\alpha}_{ijkl}-\sum_{\beta}K^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{il}-\sum_{\beta}K^{\alpha}_{i\beta k}h^{\beta}_{jl}$$
$$-\sum_{\beta}K^{\alpha}_{ij\beta}h^{\beta}_{kl}+\sum_{m}K^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{ml}.$$

这样，在条件(5.3.37)下，我们有

$$K^{\alpha}_{ijkl}=\sum_{\beta}K^{\alpha}_{\beta jk}h^{\beta}_{il}+\sum_{\beta}K^{\alpha}_{i\beta k}h^{\beta}_{jl}+\sum_{\beta}K^{\alpha}_{ijk}h^{\beta}_{kl}-\sum_{m}K^{m}_{ijk}h^{\alpha}_{ml}. \tag{5.3.38}$$

M上第二基本张量 h^{α}_{ij} 的 Laplacian Δh^{α}_{ij} 是

$$\Delta h^{\alpha}_{ij}=\sum_{k}h^{\alpha}_{ijkk},$$

其中 h^{α}_{ijkl} 是 h^{α}_{ijk} 的共变导数(见本章§1.3)，它定义为

$$\sum_{l}h^{\alpha}_{ijkl}\omega^{l}=dh^{\alpha}_{ijk}-\sum_{l}h^{\alpha}_{ljk}\omega^{l}_{i}-\sum_{l}h^{\alpha}_{ilk}\omega^{l}_{j}$$
$$-\sum_{l}h^{\alpha}_{ijl}\omega^{l}_{k}+\sum_{\beta}h^{\beta}_{ijk}\omega^{\alpha}_{\beta}.$$

对上式外微分，利用结构方程，就得相应的 Ricci 恒等式

$$h^{\alpha}_{ijkl}-h^{\alpha}_{ijlk}=\sum_{m}h^{\alpha}_{im}R^{m}_{jkl}+\sum_{m}h^{\alpha}_{mj}R^{m}_{ikl}-\sum_{\beta}h^{\beta}_{ij}R^{\alpha}_{\beta kl}. \tag{5.3.39}$$

据(5.1.26)，有

$$\sum_{k}h^{\alpha}_{ijkk}=\sum_{k}h^{\alpha}_{ikjk}-\sum_{k}K^{\alpha}_{ijkk}=\sum_{k}h^{\alpha}_{kijk}-\sum_{k}K^{\alpha}_{ijkk}.$$

据(5.3.39)，有

$$h^{\alpha}_{kijk}=h^{\alpha}_{kikj}+\sum_{m}h^{\alpha}_{km}R^{m}_{ijk}+\sum_{m}h^{\alpha}_{mi}R^{m}_{kjk}-\sum_{\beta}h^{\beta}_{ki}R^{\alpha}_{\beta jk}.$$

由此两式，我们可算得

$$\Delta h^{\alpha}_{ij}=\sum_{k}(h^{\alpha}_{kkij}-K^{\alpha}_{kikj}-K^{\alpha}_{ijkk})$$
$$+\sum_{k}(\sum_{m}h^{\alpha}_{km}R^{m}_{ijk}+\sum_{m}h^{\alpha}_{mi}R^{m}_{kjk}-\sum_{\beta}h^{\beta}_{ki}R^{\alpha}_{\beta jk}). \tag{5.3.40}$$

把(5.1.22)，(5.1.23)和(5.3.38)代入(5.3.40)，最后可得

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}(4K_{\beta ki}^{\alpha}h_{jk}^{\beta}h_{ij}^{\alpha}-K_{k\beta k}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})$$
$$+2\sum_{\alpha,i,j,k,m}(K_{kik}^{m}h_{mj}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}+K_{ijk}^{m}h_{mk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha})$$
$$-\sum_{\alpha,\beta,i,j}[\sum_{k}(h_{ik}^{\alpha}h_{kj}^{\beta}-h_{jk}^{\alpha}h_{ki}^{\beta})]^2-\sum_{\alpha,\beta}(\sigma_{\alpha\beta})^2, \tag{5.3.41}$$

其中 $\sigma_{\alpha\beta}$ 由(5.3.19)定义.

现设 $\overline{M}$ 具有常数截面曲率 c, 即

$$K_{ABCD}=c(\delta_{AC}\delta_{BD}-\delta_{AD}\delta_{BC}).$$

记矩阵 $H^{\alpha}=(h_{ij}^{\alpha})$, 它的迹记为 $\operatorname{tr}H^{\alpha}$, 则(5.3.41)化为

$$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=-\sum_{\alpha,\beta}\operatorname{tr}(H^{\alpha}H^{\beta}-H^{\beta}H^{\alpha})^2-\sum_{\alpha,\beta}(\sigma_{\alpha\beta})^2+nc\|B\|^2. \tag{5.3.42}$$

为了对上式右边作出估计，我们需要下面的代数引理(参考[4]).

引理 1 设 A, B 是 $n\times n$ 对称矩阵, 则

$$\operatorname{tr}(AB-BA)^2\leqslant 2(\operatorname{tr}A^2)(\operatorname{tr}B^2), \tag{5.3.43}$$

式中对非零矩阵 A 和 B 等号成立, 当且仅当存在正交矩阵 Q, 使 $\tilde{A}={}^tQAQ$ 和 $\tilde{B}={}^tQBQ$ 同时化为

$$\tilde{A}=\lambda\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\\0&-1&0\\\hline &0&0\end{array}\right),\quad \tilde{B}=\mu\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\\1&0&0\\\hline &0&0\end{array}\right),$$

这里 λ 和 μ 是比例因子.

证明 因为矩阵的迹在合同变换下不变，对称矩阵可在合同变换下对角化, 所以不失一般性, 可假定 A 为对角矩阵$(a_i\delta_{ij})$，而 $B=(b_{ij})$. 于是

$$\operatorname{tr}(AB-BA)^2=\sum_{i\neq j}(a_i-a_j)^2b_{ij}^2\leqslant 2\sum_{i\neq j}(a_i^2+a_j^2)b_{ij}^2$$
$$\leqslant 2(\sum_{i}a_i^2)(\sum_{i,j}b_{ij}^2)=2(\operatorname{tr}A^2)(\operatorname{tr}B^2). \tag{5.3.44}$$

现设 A 和 B 为非零矩阵，且上式等号成立．从(5.3.44)的第二个等号得

$$b_{11}=\cdots=b_{nn}=0,$$

且若 $b_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则

$$a_i+a_j=0.$$

由于 B 非零，不失一般性，可设 $b_{12}\neq 0$，于是，$a_1=-a_2$．再从(5.3.44)的第三个等号得

$$a_3=\cdots=a_n=0.$$

既然 A 非零，故 $a_1=-a_2\neq 0$，从而对一切 $(i,\ j)\neq(1,\ 2)$ 有 $b_{ij}=0$，引理证毕．▮

现在把引理1应用于(5.3.42)的右边第一项，注意到 $\mathrm{tr}(H^\alpha)^2=\sigma_{\alpha\alpha}$，则得

$$\sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\geqslant-2\sum_{\alpha\neq\beta}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}-\sum_{\alpha,\beta}(\sigma_{\alpha\beta})^2+nc\|B\|^2.$$

由于 $(\sigma_{\alpha\beta})$ 是 $p\times p$ 对称矩阵，适当选取法向量场 $\{e_\alpha\}$ 可使它对角化，因此上式化为

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha&\geqslant nc\|B\|^2-2\sum_{\alpha\neq\beta}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}-\sum_{\alpha}(\sigma_{\alpha\alpha})^2\\&=nc\|B\|^2-2\,(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha})^2+\sum_{\alpha}(\sigma_{\alpha\alpha})^2.\end{aligned}$$

注意到 $\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}=\|B\|^2$，且由 Schwarz 不等式

$$\sum_{\alpha}(\sigma_{\alpha\alpha})^2\geqslant\frac{1}{p}(\sum_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha})^2=\frac{1}{p}\|B\|^4,$$

上式可化为 $$\sum_{\alpha,i,j}h_{ij}^\alpha\Delta h_{ij}^\alpha\geqslant nc\|B\|^2-\left(2-\frac{1}{p}\right)\|B\|^4.$$

代入(5.3.36)，最后可得

$$\frac{1}{2}\Delta(\|B\|^2)\geqslant\sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2+\|B\|^2\left[nc-\left(2-\frac{1}{p}\right)\|B\|^2\right]. \tag{5.3.45}$$

若 M 是紧致无边的，则对上式两边积分得

定理5.3.7(J. Simons, 1967) 设$S^{n+p}(c)$是常曲率$c>0$的欧氏球面，$M\to S^{n+p}(c)$是n维紧致无边的极小子流形，则

$$\int_M \|B\|^2\left[\left(2-\frac{1}{p}\right)\|B\|^2-nc\right]dv_M\geqslant 0. \qquad (5.3.46)$$

这就是著名的J. Simons不等式．由此即得

推论1 在定理5.3.7的假设下，若

$$\|B\|^2\leqslant nc\Big/\left(2-\frac{1}{p}\right),$$

则或者$\|B\|^2=0$，M是全测地子流形；或者

$$\|B\|^2=nc\Big/\left(2-\frac{1}{p}\right).$$

Chern-do Carmo-Kobayashi进一步证得：在后者情况下，M或为Clifford极小超曲面，或为S^4的Veronese曲面(参考[4])．

一个自然的问题是：若紧致无边极小子流形$M\to S^{n+p}(c)$的$\|B\|^2=$常数(相当于纯量曲率为常数)，则$\|B\|^2$的可能值是否是离散的？下一个可能的值是多少？这个问题即使在$p=1$时也未彻底解决．

习　题

1．验证：公式(5.3.15)和(5.3.16)。

2．证明公式(5.3.21)和(5.3.25)。

3．验证(5.3.32)并证明映射(5.3.31)是极小浸入。

4．验证公式(5.3.38)。

5．设$N^m\to S^{m+d}\subset \boldsymbol{R}^{m+d+1}$是$m$维连通子流形，它在$S^{m+d}$中的第二基本形式长度平方$\|\tilde{B}\|^2<(m-1)\tilde{K}_N$，其中$\tilde{K}_N$是$N$在每点的截面曲率的下界．试证：$N^m$中不存在紧致无边的稳定极小子流形。

［提示］ 参考Proc. AMS, 93(1985), 111—117.

6. 设 $M\to S^{n+p}(c)$是 $n(\geqslant 4)$维紧致无边的极小子流形，若M的 Ricci 曲率大于$(n-2)c$，则M是全测地的.

[参考 N. Ejiri, J. Math. Soc. Japan, 31(1979), 251—256.]

7. 设 $M\to S^{n+p}(c)$ 是紧致无边的极小子流形，若 M 的截面曲率大于$\dfrac{p-1}{2p-1}c$，则 M 是全测地的.

[参考 S. T. Yau, Amer. J. Math., 97(1975), 76—100.]

8. 设 A_1, A_2, A_3 是三个 $n\times n$ 对称矩阵，它们两两满足等式(5.3.43)，试证：A_1, A_2, A_3 中至少有一个为零矩阵. 利用这个代数结论，证明：定理 5.3.7 的推论 1 中，若

$$\|B\|^2=nc\Big/\left(2-\frac{1}{p}\right),$$

则M或为 Clifford 极小超曲面，或为 S^4 中 Veronese 曲面. (参考[4])

9. 设 $M\to S^{n+p}(c)$ 是紧致无边的极小子流形，利用(5.3.42)及 Gauss 方程，试证：

$$\int_M\{p\|\mathrm{Riem}(M)\|^2+2p\|\mathrm{Ric}(M)\|^2-\rho^2+n(3p-2n+2)c\rho$$
$$-n^2(n-1)(n-p-1)c^2\}dv_M\geqslant 0,$$

其中$\|\mathrm{Riem}(M)\|^2$表示M的曲率张量的长度平方，$\|\mathrm{Ric}(M)\|^2$表示 Ricci 张量的长度平方，ρ 表示纯量曲率.

[参考：白正国，数学年刊，8A(1987), 362—367.]

10. 设 $M\to S^{n+p}(c)$是紧致无边的极小子流形，若M的第二基本形式的长度平方

$$\|B\|^2\leqslant nc\Big/\left(1+\sqrt{\frac{n-1}{2n}}\right),$$

则M或是全测地子流形，或是 S^4 中的 Veronese 曲面.

[参考：沈一兵，中国科学，32 A(1988), 1—11.]

11. 设 $M\to S^{n+1}(1)\subset \boldsymbol{R}^{n+2}$ 是紧致无边的极小超曲面，M的 Gauss 映射 $\mathscr{G}: M\to S^{n+1}(1)$定义为 M 的单位法向量平行移动到 $\boldsymbol{R}^{n+2}$ 的原点. 试证：若 $\mathscr{G}(M)$落在 $S^{n+1}(1)$的闭半球面内，则M是全测的.

[提示] 设 a 是 $\boldsymbol{R}^{n+2}$ 的常向量，e_{n+1} 是M在 $S^{n+1}(1)$ 中的单位法向量，计算 $\Delta\langle a, e_{n+1}\rangle$.

§4 全绝对曲率与 Gauss 映射

4.1 Lipschitz-Killing 曲率

在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，曲线的全曲率和曲面 Gauss 曲率的积分，分别反映了曲线和曲面的整体几何性质，它们由曲线和曲面本身的度量所决定，因而是一种内蕴的弯曲测度. 本节介绍这些概念在高维欧氏空间的子流形上的推广(参考[5]).

设 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 是给定一个定向的 $n+p$ 维欧氏空间. $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的一个标架是指一点 $x\in\boldsymbol{R}^{n+p}$ 和在 x 的 $n+p$ 个互相正交的单位向量 $e_1, \cdots, e_{n+p}$, 使它们的定向与给定的定向一致. 我们用 $(xe_1, \cdots, e_{n+p})$ 表示这样的一个标架，并记 $\boldsymbol{F}(n, p)$ 为这种标架的全体，它们构成一个 $\frac{1}{2}(n+p)(n+p+1)$ 维微分流形. 于是，

$$\langle e_A, e_B\rangle=\delta_{AB},$$

这里$\langle\ ,\ \rangle$表示欧氏内积. 在 $\boldsymbol{F}(n, p)$ 中引入 1-形式 θ^A 和 θ^A_B, 它们由下列方程确定

$$dx=\sum\theta^A e_A,\quad de_A=\sum\theta^B_A e_B,\qquad\qquad \theta^A_B+\theta^B_A=0. \tag{5.4.1}$$

对这些式子外微分，便得 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的结构方程

$$d\theta^A=-\sum_B\theta^A_B\wedge\theta^B,\qquad d\theta^A_B=-\sum_C\theta^A_C\wedge\theta^C_B. \tag{5.4.2}$$

现设 $x: M^n\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 是 n 维光滑流形 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的等距浸入，$x(P)$ 便是点 $P\in M$ 的位置向量. 浸入 x 诱导出 M 上的如下向量丛(其定义类似于 M 的切丛或法丛，只是作为每点纤维的向量空间不一样):

(i) 单位切丛 $\boldsymbol{E}_T$: 它的丛空间是 $M^n\times\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的子集，由一

切这样的点(P,v)组成，其中 $P\in M$，v是在$x(P)$的单位切向量，即$v\in T_{x(P)}(M)$，$|v|=1$.

(ii) 单位法丛E_ν: 它的点为(P,ν)，其中$P\in M$，$\nu\in T^\perp_{x(P)}(M)$，$|\nu|=1$.

(iii) 标架从E: 它是$M^n\times F(n,p)$的子集，由一切这样的标架$(P;x(P)e_1,\cdots,e_{n+p})\in M^n\times F(n,p)$组成，使得$e_1,\cdots,e_n$是在$x(P)$的单位切向量，$e_{n+1},\cdots,e_{n+p}$是在$x(P)$的单位法向量. 这个向量丛的投影记为$\psi:E\to M$. 定义映射$\psi_\tau:E\to E_\tau$和$\psi_\nu:E\to E_\nu$分别为

$$\begin{aligned}\psi_\tau(P;x(P)e_1,\cdots,e_{n+p})&=(P,e_n),\\ \psi_\nu(P;x(P)e_1,\cdots,e_{n+p})&=(P,e_{n+p}).\end{aligned}\tag{5.4.3}$$

考虑映射

$$E\xrightarrow{i}M^n\times F(n,p)\xrightarrow{\pi}F(n,p),$$

其中i是包含映射，π是自然投影.

置 $$\omega^A=(\pi\circ i)^*\theta^A,\quad \omega^A_B=(\pi\circ i)^*\theta^A_B,$$

由于$(\pi\circ i)^*$与d及$\wedge$的可交换性，从(5.4.1)和(5.4.2)得

$$\begin{gathered}dx(P)=\sum_A\omega^Ae_A,\quad de_A=\sum_B\omega^B_Ae_B,\\ \omega^A_B+\omega^B_A=0,\end{gathered}\tag{5.4.4}$$

$$d\omega^A=-\sum_B\omega^A_B\wedge\omega^B,\quad d\omega^A_B=-\sum_C\omega^A_C\wedge\omega^C_B.\tag{5.4.5}$$

由E的定义，在浸入子流形$x(M)$上，$\omega^\alpha=0$，因而得

$$\omega^\alpha_i=\sum_j h^\alpha_{ij}\omega^j,\quad h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}.\tag{5.4.6}$$

我们的基本想法是考虑丛空间E，在E上构造微分形式，使它是流形M和丛E_ν上微分形式分别在ψ和ψ_ν下的逆像.

M^n的体积元dv_M是

$$dv_M=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n.\tag{5.4.7}$$

单位法丛 E_ν 的体积元是 $dv_M\wedge d\sigma_{p-1}$, 其中 $d\sigma_{p-1}$ 是 $(p-1)$ 次形式，它在 E_ν 的每个纤维(是 $p-1$ 维单位球面)上的限制就是在该点 $P\in M$ 的单位法向量球面的体积元. 因为

$$de_{n+p}=\sum_A \omega_{n+p}^A e_A$$

的法向部分是

$$\sum_\alpha \omega_{n+p}^\alpha e_\alpha=\sum_{\beta\neq n+p}\omega_{n+p}^\beta e_\beta,$$

因此

$$d\sigma_{p-1}=\omega_{n+p}^{n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n+p}^{n+p-1},$$

$$dv_M\wedge d\sigma_{p-1}=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\wedge\omega_{n+p}^{n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n+p}^{n+p-1}. \tag{5.4.8}$$

另一方面，利用欧氏平行性，可把点 $P\in M$ 的单位法向量 ν 平移到 R^{n+p} 的原点，它的像位于 R^{n+p} 的单位标准超球面 S_0^{n+p-1} 上. 这样，就诱导了一个映射 $\tilde{\nu}:E_\nu\to S_0^{n+p-1}$, 它定义为

$$\tilde{\nu}(P,\ \nu(P))=\nu.$$

这是经典的 Gauss 映射的直接推广，我们称它为 Gauss 球面映射. 在 R^{n+p} 中，取 $\nu=e_{n+p}$,

$$de_{n+p}=\sum_A\theta_{n+p}^A e_A=\sum_{B\neq n+p}\theta_{n+p}^B e_B,$$

故 S_0^{n+p-1} 的体积元 $d\Sigma$ 可写为

$$d\Sigma=\theta_{n+p}^1\wedge\cdots\wedge\theta_{n+p}^{n+p-1}.$$

把它拉回到 E_ν 上，我们有

$$\tilde{\nu}^*(d\Sigma)=\omega_{n+p}^1\wedge\cdots\wedge\omega_{n+p}^{n+p-1}.$$

利用(5.4.6)，上式写为

$$\tilde{\nu}^*(d\Sigma)=(-1)^n\det(h_{ij}^{n+p})\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\wedge\omega_{n+p}^{n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n+p}^{n+p-1}. \tag{5.4.9}$$

比较(5.4.8)和(5.4.9)，便得

$$\tilde{\nu}^*(d\Sigma)=G(P,\ \nu)dv_M\wedge d\sigma_{p-1},$$

其中

$$G(P,\ \nu) \xlongequal{\text{(def)}} (-1)^n \det(h_{ij}^{n+p}) \qquad (e_{n+p}=\nu). \quad (5.4.10)$$

定义 5.4.1 由(5.4.10)定义的 $G(P,\ \nu)$ 称为浸入子流形 M 在 $\nu(P)=e_{n+p}(P)$ 的 Lipschitz-Killing 曲率. 它的积分

$$K^*(P) \xlongequal{\text{(def)}} \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{S_\nu^{p-1}} |G(P,\ \nu)|\, d\sigma_{p-1}$$

称为 M 在 P 点的全绝对曲率, 其中 S_ν^{p-1} 是在点 P 的单位法向量球面, c_{n+p-1} 表示 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 中单位超球面 S_0^{n+p-1} 的体积. 若积分

$$\tau(M,\ x) \xlongequal{\text{(def)}} \int_M K^*(P)\, dv_M$$

收敛, 则称它为浸入子流形 $x: M \to \boldsymbol{R}^{n+p}$ 的全绝对曲率.

例 设 $x: M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ 是通常的浸入曲面, 即 $n=2$, $p=1$. 于是, $\dim \boldsymbol{F}(2,\ 1)=6$, $\dim \boldsymbol{E}_\nu=2$, $\dim \boldsymbol{E}_\tau=3$, $\dim \boldsymbol{E}=3$.

$$dx(P)=\omega^1 e_1+\omega^2 e_2, \qquad \omega_i^3=\sum_j h_{ij}\omega^j.$$

M^2 的第一结构方程为

$$d\omega^1+\omega_2^1\wedge\omega^2=0, \quad d\omega^2-\omega_2^1\wedge\omega^1=0,$$

由 $de_3=\omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2$ 得 M^2 的第二基本形式为

$$\begin{aligned}\langle -de_3,\ dx(P)\rangle &= \omega_1^3\omega^1+\omega_2^3\omega^2 \\ &= h_{11}(\omega^1)^2+2h_{12}\omega^1\omega^2+h_{22}(\omega^2)^2.\end{aligned}$$

此时 M^2 的第一基本形式为 $(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$. 因此, M^2 的 Gauss 曲率为

$$K=h_{11}h_{22}-(h_{12})^2=\det(h_{ij}) \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant 2).$$

M^2 的第二结构方程为

$$d\omega_2^1=-\omega_3^1\wedge\omega_2^3, \quad d\omega_3^1=-\omega_2^1\wedge\omega_3^2,$$

$$d\omega_3^2=-\omega_1^2\wedge\omega_3^1.$$

最后两个方程正是 M^2 的 Codazzi 方程. 第一个方程可化为

$$d\omega_2^1=K\omega^1\wedge\omega^2,$$

它是 M^2 的 Gauss 方程. M^2 的体积元是 $\omega^1\wedge\omega^2$. Gauss 映射

$\nu: M^2 \to S_0^2$，它的体积元是

$$\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2.$$

由此可见，浸入子流形的 Lipschitz-Killing 曲率是普通欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的 Gauss 曲率的推广.

一般地说，子流形的 Lipschitz-Killing 曲率 $G(P, \nu)$ 与 $\nu(P)$ 有关. 若

$$\nu = \sum_\alpha t^\alpha e_\alpha,$$

则
$$G(P, \nu) = (-1)^n \det\left(\sum_\alpha t^\alpha h_{ij}^\alpha\right) \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

当 M^n 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的超曲面时，取定单位法向量 $\nu_0 = e_{n+1}$，则

$$G(P) = G(P, \nu_0) = (-1)^n \det(h_{ij}) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n, \tag{5.4.11}$$

其中 λ_i 是 M 的 n 个主曲率. 这时 $G(P)$ 称为超曲面 M 在点 P 的 Gauss-Kronecker 曲率. 因为 M 在点 P 的单位法向量只能是 $\nu = \pm\nu_0$，因此

$$\begin{aligned} G(P, \nu) &= G(P, \pm\nu_0) = (\pm 1)^n G(P, \nu_0) \\ &= (\pm 1)^n G(P). \end{aligned}$$

特别当 n 为偶数时，Gauss-Kronecker 曲率与单位法向量的选择无关.

现在可给出 Lipschitz-Killing 曲率的一种几何解释.

定理 5.4.1 对于浸入子流形 $x: M^n \to \boldsymbol{R}^{n+p}$，设 $P \in M^n$，$L(\nu)$ 是由切空间 $T_{x(P)}(M)$ 与在 $x(P)$ 的单位法向量 ν 构成的 $n+1$ 维线性子空间. 那末，M 的 $G(P, \nu)$ 等于 $x(M)$ 在 $L(\nu)$ 中的正交投影的 Gauss-Kronecker 曲率.

证明 在点 P 的一个邻域里，取 $\boldsymbol{E}$ 中 M 的局部标架场 $\{\tilde{e}_A\}$，使得 $\nu(P) = \tilde{e}_{n+p}(P)$. 记 $\tilde{e}_A(P) = (\tilde{e}_A)_0$，$x(P) = x_0$. 若 $x'(Q)$ 表示 $x(Q)$，$Q \in M$，在 $L(\nu)$ 中的投影，则 $x'(Q)$ 满足下列方程

$$x'(Q)-x(Q)=\sum_{\beta\neq n+p}\xi_\beta(\tilde{e}_\beta)_0,$$

$$x'(Q)-x_0\equiv 0 \bmod ((\tilde{e}_1)_0,\ \cdots,\ (\tilde{e}_n)_0,\ (\tilde{e}_{n+p})_0).$$

由此得

$$\xi_\beta=\langle x'(Q)-x(Q),\ (\tilde{e}_\beta)_0\rangle=\langle x_0-x(Q),\ (\tilde{e}_\beta)_0\rangle\qquad(\beta\neq n+p).$$

固定点 P, 让 Q 在 P 的邻域里变动, 则

$$dx'=dx+\sum_{\beta\neq n+p}d\xi_\beta(\tilde{e}_\beta)_0=dx-\sum_{\beta\neq n+p}\langle dx,\ (\tilde{e}_\beta)_0\rangle(\tilde{e}_\beta)_0,$$

$$d^2x'=d^2x-\sum_{\beta\neq n+p}\langle d^2x,\ (\tilde{e}_\beta)_0\rangle(\tilde{e}_\beta)_0.$$

从而

$$\langle(\tilde{e}_{n+p})_0,\ d^2x'\rangle=\langle(\tilde{e}_{n+p})_0,\ d^2x\rangle.\tag{5.4.12}$$

注意到 $\langle(\tilde{e}_{n+p})_0,\ d^2x\rangle=-\langle d(\tilde{e}_{n+p})_0,\ dx\rangle=\sum_{i,j}\tilde{h}_{ij}\omega^i\omega^j$,

则等式(5.4.12)就完成了定理的证明. ▮

4.2 全绝对曲率

由上所述, 直接计算一个子流形的全绝对曲率 $\tau(M,\ x)$ 似乎是相当困难的. 但若仔细分析定义 5.4.1, 则可以应用 Morse 理论来间接估计 $\tau(M,\ x)$. 事实上, 对于等距浸入 $x: M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$, 我们有 Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}: \boldsymbol{E}_\nu\to S_0^{n+p-1}$, 它把点 $x(P)$ 处的单位法向量 $\nu(P)$ 平行移动到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的原点, 即对于 $(P,\ \nu(P))\in\boldsymbol{E}_\nu$,

$$\tilde{\nu}(P,\ \nu(P))=\nu\in S_0^{n+p-1}.$$

根据定义 5.4.1,

$$\tau(M,\ x)=\int_M K^*(P)dv_M$$

$$=\frac{1}{c_{n+p-1}}\int_{\boldsymbol{E}_\nu}|G(P,\ \nu)|dv_M\wedge d\sigma_{p-1}.\tag{5.4.13}$$

上式右边的最后一个积分正是 $\boldsymbol{E}_\nu$ 在 Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}$ 下的象的体积. 因此, (5.4.13) 表明, $\tau(M,\ x)$ 是单位超球面 S_0^{n+p-1} 被

Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}$ 覆盖的次数的平均值.

对于一个固定向量 $\nu_0 \in S_0^{n+p-1}$, 考虑函数

$$f(P)=\langle \nu_0, x(P)\rangle, \quad P\in M^n.$$

它是 M 上的实值函数. 在 f 的临界点 $P\in M$, $df(P)=0$, 即

$$\langle \nu_0, dx(P)\rangle=0.$$

这表明 M 在 $x(P)$ 的法向量正好平行于 ν_0. 因此, 计算 S_0^{n+p-1} 被 Gauss 球面映射覆盖的次数, 就化为讨论 M 上某个实函数的临界点个数. 为此, 我们引述 Morse 理论的若干内容, 详细可参考 [10].

设 $f: M\to \boldsymbol{R}$ 是 n 维流形 M 上的实函数. 若在点 $P\in M$, f 的微分 $(f_*)_P: T_P(M)\to T_{f(P)}(\boldsymbol{R})$ 等于零, 则称 P 是 f 的临界点, 对应的函数值 $f(P)$ 称为临界值. 在局部坐标系 (x^i) 下, 临界点的条件就是

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x^i}=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

在临界点 P, 若矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(P)\right)_{n\times n}$ 非奇异, 即

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}(P)\right)\neq 0,$$

则称 P 是 f 的非蜕化临界点. 这时, 上述 n 阶对称矩阵的负特征值的个数 λ 称为非蜕化临界点 P 的指数.

现设 M 是紧致光滑流形, $f: M\to \boldsymbol{R}$ 是光滑函数, 它的临界点都是非蜕化的(因而是孤立的). 用 c_λ 表示指数为 λ 的临界点个数, b_λ 表示 M 的第 λ 次 Betti 数(见第三章, §4). Morse 不等式是

$$b_0\leqslant c_0,$$

$$b_1-b_0\leqslant c_1-c_0,$$

$$b_2-b_1+b_0\leqslant c_2-c_1+c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

并且M的示性数$\chi(M)$为

$$\chi(M)=\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^{\lambda}b_{\lambda}=\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^{\lambda}c_{\lambda}. \qquad (5.4.14)$$

由上述不等式就导出所谓弱 Morse 不等式:

$$b_{\lambda}\leqslant c_{\lambda},\quad \lambda=0, 1, \cdots, n. \qquad (5.4.15)$$

此外,我还需要下列 Reeb 定理(见[10], §4).

定理5.4.2(G. Reeb) 若紧致流形M^n上光滑函数$f:M\to \boldsymbol{R}$恰好有二个非蜕化临界点,则M^n同胚于球面S^n.

现在回到全绝对曲率的表达式(5.4.13). 我们有

定理5.4.3 设$x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$是$n$维紧致光滑流形$M^n$到$\boldsymbol{R}^{n+p}$的等距浸入,则

$$\tau(M, x)\geqslant\sum_{\lambda=0}^{n}c_{\lambda}(M)\geqslant\sum_{\lambda=0}^{n}b_{\lambda}(M). \qquad (5.4.16)$$

证明 对于固定的$\nu_0\in S_0^{n+p-1}$, 考虑M^n上实函数

$$f(P)=\langle\nu_0, x(P)\rangle,\quad \forall P\in M^n.$$

若P是f的临界点, 即$\langle\nu_0, dx(P)\rangle=0$, 则$M^n$在$x(P)$的法向量平行于$\nu_0$. 于是,在$x(P)$, 有

$$\nu_0=\sum_{\alpha}t^{\alpha}e_{\alpha},$$

$$\begin{aligned}d^2f(P)&=\langle\nu_0, d^2x(P)\rangle\\&=-\langle d\nu_0, dx(P)\rangle\\&=\sum_{\alpha,i,j}t^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}\omega^i\omega^j.\end{aligned} \qquad (5.4.17)$$

这表明,当且仅当 Lipschitz-Killing 曲率$G(P, \nu_0)=0$时,P是f的蜕化临界点. 这也是 Gauss 球面映射$\tilde{\nu}$在(P, ν_0)的 Jacobi 为非奇异的充要条件. 但根据 Sard 定理, 这些点在S_0^{n+p-1}中的像的测度为零. 因此,在计算全绝对曲率$\tau(M, x)$时,可以忽略这些点. 换言之,我们只要考虑使函数$f=\langle\nu, x\rangle$具有非蜕化临界点的那些$\nu\in S_0^{n+p-1}$. 于是,根据(5.4.15)便得(5.4.16). ▌

由于 M 的紧致性，对于任何固定的 $\nu_0\in S_0^{n+p-1}$，函数 $f=\langle\nu_0, x\rangle$ 至少有二个非蜕化的临界点(极大与极小点)，除非 f 是常数。但在后者情况下，M^n 的一切点都是蜕化临界点。因此，就有

推论 1 在定理 5.4.3 的条件下，

$$\tau(M, x)\geqslant 2. \tag{5.4.18}$$

结合 Reeb 定理，我们还有

定理 5.4.4(Chern-Lashof) 设 $x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$ 是紧致定向流形 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的等距浸入，若 $\tau(M, x)<3$，则 M^n 同胚于 S^n.

证明 由于 $\tau(M, x)<3$，故在 S_0^{n+p-1} 上存在一个正测度集合 $\mathscr{S}\subseteq S_0^{n+p-1}$，使得当 $\nu_0\in\mathscr{S}$ 时，$\langle\nu_0, x(P)\rangle$ 恰好有二个临界点；否则将导致 $\tau(M, x)\geqslant 3$ 的矛盾。另一方面，根据 Sard 定理，Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}:\boldsymbol{E}_\nu\to S_0^{n+p-1}$ 的临界点的像集在 S_0^{n+p-1} 上具有零测度。因此，一定存在 $\nu_0\in S_0^{n+p-1}$，使得函数 $f=\langle\nu_0, x(P)\rangle$ 在 M^n 上恰有二个临界点，并且 ν_0 不是 Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}$ 的临界点的像。这意味着在 f 的临界点 P，$G(P, \nu_0)\neq 0$. 换言之，$\langle\nu_0, d^2x(P)\rangle$ 是一个具有非零系数行列式的二次型(比较(5.4.17)式)。因此，函数 $\langle\nu_0, x(P)\rangle$ 在 M^n 上恰有二个非蜕化的临界点。应用 Reeb 定理 5.4.2，便得我们的结论。▌

对于 $\tau(M, x)=2$ 的浸入子流形，我们还有

定理 5.4.5(Chern-Lashof) 设 $x:M^n\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 是紧致定向流形 M^n 到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的等距浸入，则 $\tau(M, x)=2$ 的充要条件是 x 为嵌入，且 $x(M)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的线性子空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的凸超曲面。

这个定理的完全证明可参考[5]. 当 $n=2$, $p=1$ 时，可简单证明如下。

设 M^2 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的定向闭曲面。用 K 表示 M 的 Gauss 曲率，χ 表示 M 的示性数，则有 Gauss-Bonnet 公式

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dS=\frac{1}{2\pi}\int_{M(K>0)}K\,dS+\frac{1}{2\pi}\int_{M(K<0)}K\,dS.$$

另一方面，由全绝对曲率的定义

$$\begin{aligned}\tau(M)&=\frac{1}{2\pi}\int_M|K|dS\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{M(K>0)}K\,dS-\frac{1}{2\pi}\int_{M(K<0)}K\,dS.\end{aligned}$$

因此，
$$\tau(M)=\frac{1}{\pi}\int_{M(K>0)}K\,dS-\chi.$$

根据 Hadamard 定理，对于 $K>0$，Gauss 映射 $M\to S_0^2$ 是满射，故有

$$\int_{M(K>0)}K\,dS\geqslant\int_{S_0^2}dS=4\pi.$$

所以，
$$\tau(M)\geqslant 4-\chi.$$

当 $\tau(M)=2$ 时，$\chi=2$，故 M 同胚于 S^2.

注 定理 5.4.3—5.4.5 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中闭曲线全曲率的 Fenchel 定理在高维的推广．当浸入 $x:M^n\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 具有极小全绝对曲率，且 $x(M)$ 不能落在 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的任何线性子空间中时，则称 x 为绷紧浸入 (Tight immersion)．这是数学中"凸性"概念的自然推广．

4.3 Gauss 映射

前面提到的 Gauss 球面映射 $\tilde{\nu}$ 是从单位法丛 $\boldsymbol{E}_\nu$ 到单位超球面 S_0^{n+p-1} 的映射．经典 Gauss 映射的另一种推广是从子流形 M 到 Grassmann 流形的映射，其基本想法如下．

设 $x:M^n\to\boldsymbol{R}^{n+p}$ 是等距浸入，在局部讨论时，可不必区分 M 与 $x(M)$．对于每点 $P\in M^n$，利用 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的自然平行性，把切空间 $T_P(M)$ 作为一个 n 维平面 $\boldsymbol{R}^n$ 平行移动到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的原点 0(即使 P 与 0 重合)，从而成为 Grassmann 流形 $G_{n,p}=G(n,n+p)$ 的一个

元素．这样，当 P 在 M^n 上变动时，就建立了 $M^n \to G_{n,p}$ 的一个映射，我们称之为M到 Grassmann 流形的 Gauss 映射，并用 $\mathscr{G}: M^n \to G_{n,p}$ 表示之．它的几何意义如下．

用 $\boldsymbol{F}_0(n+p)$表示在 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 原点 0 的所有幺正标架，它具有与 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的给定定向相同的定向．于是，$\boldsymbol{F}_0(n+p)$ 与规范正交群 $SO(n+p)$ 自然恒同．对于过 0 的一个 n 维定向平面 π_n，群 $SO(n+p)$ 在 π_n 上的迷向子群是 $SO(n)\times SO(p)$．因此，Grassmann 流形 $G_{n,p}$ 可与商群 $SO(n+p)/SO(n)\times SO(p)$ 恒同．子流形 M^n 的标架丛是 $\boldsymbol{E}$(见上面 § 4.1)，$\psi: \boldsymbol{E}\to M^n$ 是丛投影．定义包含映射 $\mathscr{F}: \boldsymbol{E}\to \boldsymbol{F}_0(n+p)$，它把 $\boldsymbol{E}$ 中标架平行移动到 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的原点 0．那末，我们有下列可交换图：

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{E} & \xrightarrow{\mathscr{F}} & \boldsymbol{F}_0(n+p)=SO(n+p) \\ \psi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ M^n & \xrightarrow{\mathscr{G}} & G_{n,p}=SO(n+p)/SO(n)\times SO(p) \end{array} \tag{5.4.19}$$

其中投影 $\varphi: \boldsymbol{F}_0(n+p)\to G_{n,p}$ 定义如下：设 $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+p})\in \boldsymbol{F}_0(n+p)$，则 $\varphi(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+p})$ 是由 $e_1, \cdots, e_n$ 张成的 n 维定向平面 π_n．

对于$(e_1, \cdots, e_{n+p})\in SO(n+p)$，令

$$de_A=\sum_B \theta_A^B e_B,$$

则 θ_A^B 满足结构方程(5.4.2)．在 $G_{n,p}$ 上引入二次微分型

$$d\Sigma^2=\sum_{\alpha,i}(\theta_i^\alpha)^2, \tag{5.4.20}$$

它在 $SO(n+p)$的作用下不变，因此定义了 $G_{n,p}$ 上的一个规范黎曼度量．现在通过 Gauss 映射 $\mathscr{G}: M^n \to G_{n,p}$，把(5.4.20)拉回到

M^n 上，注意到 θ^A_B 在 M 上的限制是 ω^A_B，根据(5.4.6)，就有

$$\mathrm{III}=\mathscr{G}^*(d\Sigma)=\sum_{\alpha,i}(\omega^\alpha_i)^2=\sum_{\alpha,i,j,k}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}\omega^j\omega^k, \qquad (5.4.21)$$

它称为浸入子流形 $x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$ 的第三基本形式。

置

$$\mathrm{II}_H=\sum_{\alpha,i,j,k}h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jk}\omega^j\omega^k, \qquad (5.4.22)$$

它是 M^n 关于平均曲率向量 H 的第二基本形式. M^n 的第一基本形式是

$$\mathrm{I}=\sum_i(\omega^i)^2.$$

当 II_H 与 I 成比例时，M^n 称为**伪脐点子流形**，极小子流形是特殊的伪脐点子流形(比例因子为零).

令

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Ric}}=\sum_{j,k}R_{jk}\omega^j\omega^k, \qquad (5.4.23)$$

它称为 M^n 的 Ricci 形式. 根据(5.1.38)，我们有

$$R_{jk}=\sum_{\alpha,i}h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jk}-\sum_{\alpha,i}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ik}.$$

因此，由(5.4.21)，(5.4.22)和(5.4.23)，即得

定理 5.4.6(M. Obata)　对于等距浸入 $x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$，有

$$\mathrm{I}_{\mathrm{Ric}}-\mathrm{II}_H+\mathrm{III}=0. \qquad (5.4.24)$$

当 $n=2$, $p=1$ 时，$R_{jk}=K\delta_{jk}$，其中 K 是 M^2 的 Gauss 曲率，故这时(5.4.24)就化为经典微分几何学中的熟知公式.

推论　对于 $x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$，下列三条中任何两条都意味着另外一条:

(i) Gauss 映射 $\mathscr{G}:M^n\to G_{n,p}$ 是共形的;

(ii) M^n 是 Einstein 流形;

(iii) M^n 是伪脐点子流形.

4.4 Gauss 映射的调和性

在结束本节之前，我们讨论上述 Gauss 映射 $\mathscr{G}$ 的调和性. 为此，先简介调和映射的概念，详细可参考[7].

设 M 和 N 分别是 n 维和 m 维的光滑黎曼流形，在各自的局部么正标架场下，它们的度量形式分别为

$$ds_M^2=\sum_{i=1}^{n}(\omega^i)^2,\quad ds_N^2=\sum_{\alpha=1}^{m}(\theta^\alpha)^2,\qquad \begin{pmatrix}1\leqslant i,\ j,\ \cdots\leqslant n;\\ 1\leqslant\alpha,\ \beta,\ \cdots\leqslant m\end{pmatrix}.$$

设 $f:M\to N$ 是光滑映射，在 f^* 下有

$$f^*\theta^\alpha=\sum_{i=1}^{n}f_i^\alpha\omega^i,\quad \alpha=1,\ \cdots,\ m. \tag{5.4.25}$$

于是，$f^*ds_N^2$ 是 M 上半正定的二次微分型，它关于 ds_M^2 的迹之半

$$e(f)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(f^*ds_N^2)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,i}(f_i^\alpha)^2$$

称为映射 f 的能量密度. 设 $\mathscr{D}\subset M$ 是紧致区域，其边界为 $\partial\mathscr{D}$，积分

$$E_{\mathscr{D}}(f)=\int_{\mathscr{D}}e(f)dv_M \tag{5.4.26}$$

称为 f 在 $\mathscr{D}$ 上的能量. 若对于所有保持边界 $\partial\mathscr{D}$ 的映射 $\mathscr{D}\to N$，$E_{\mathscr{D}}(f)$ 达到其临界值，则称 f 是 $\mathscr{D}$ 上的调和映射. 若 f 在 M 的任何紧致区域上调和，则称 f 是 M 到 N 的调和映射.

通过对能量的一阶变分计算(参考[7])可知，f 为调和映射的充要条件是它的张力场恒消失，即

$$\tau^\alpha\overset{\text{(def)}}{=\!=}\sum_{i=1}^{n}f_{ii}^\alpha=0\qquad(\alpha=1,\ \cdots,\ m) \tag{5.4.27}$$

其中 f_{ij}^α 是(5.4.25)中 f_i^α 的广义共变导数，其定义如下:

$$\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^\alpha\omega^j=df_i^\alpha-\sum_{j=1}^{n}f_j^\alpha\omega_i^j+\sum_{\beta=1}^{m}f_i^\beta(f^*\theta_\beta^\alpha), \tag{5.4.28}$$

这里 ω_i^j 和 θ_β^α 分别是M和 N 上的黎曼联络.

现在我们可以叙述下列定理.

定理 5.4.7(Ruh-Vilms) 设 $x:M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$ 是等距浸入, 它的 Gauss 映射 $\mathscr{G}:M^n\to G_{n,p}$ 为调和的充要条件是 M^n 具有平行平均曲率向量.

证明 据(5.4.28), 我们首先要求出 $G_{n,p}$ 上度量(5.4.20)所确定的黎曼联络 $\theta_{\beta i}^{j\alpha}$, 它由下列结构方程唯一确定(以下仍约定 $1\leqslant i, j, \cdots\leqslant n$; $n+1\leqslant \alpha, \beta, \cdots\leqslant n+p$)

$$d\theta_i^\alpha=-\sum_{j,\beta}\theta_{\beta i}^{j\alpha}\wedge\theta_j^\beta,\quad \theta_{\beta i}^{j\alpha}+\theta_{i\beta}^{\alpha j}=0. \tag{5.4.29}$$

另一方面, 利用(5.4.2)的第二式, 有

$$d\theta_i^\alpha=-\sum\theta_j^\alpha\wedge\theta_i^j-\sum\theta_\beta^\alpha\wedge\theta_i^\beta=-\sum(\delta_i^j\theta_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha\theta_i^j)\wedge\theta_j^\beta.$$

它与(5.4.29)相比较, 由于 $\theta_{\beta i}^{j\alpha}$ 的唯一性, 便得

$$\theta_{\beta i}^{j\alpha}=\delta_i^j\theta_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha\theta_i^j. \tag{5.4.30}$$

现在计算 Gauss 映射 $\mathscr{G}$ 的张力场. 若令

$$\mathscr{G}^*\theta_i^\alpha=\sum_j a_{ij}^\alpha\omega^j,$$

则由(5.4.6)和(5.4.21)可见

$$a_{ij}^\alpha=h_{ij}^\alpha. \tag{5.4.31}$$

根据(5.4.27)和(5.4.28), $\mathscr{G}$ 的张力场的分量为

$$\tau_i^\alpha=\sum_j a_{ijj}^\alpha, \tag{5.4.32}$$

其中 a_{ijk}^α 定义为

$$\sum_k a_{ijk}^\alpha\omega^k=d\,a_{ij}^\alpha-\sum_k a_{ik}^\alpha\omega_j^k+\sum_{\beta,k}a_{kj}^\beta(\mathscr{G}^*\theta_{\beta i}^{k\alpha}). \tag{5.4.33}$$

把(5.4.30)和(5.4.31)代入(5.4.33), 注意到交换图(5.4.19), 有

$$\begin{aligned}\sum_k a_{ijk}^\alpha\omega^k&=dh_{ij}^\alpha-\sum_k h_{ik}^\alpha\omega_j^k+\sum_{k,\beta}h_{kj}^\beta(\delta_i^k\mathscr{G}^*\theta_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha\mathscr{G}^*\theta_i^k)\\&=d\,h_{ij}^\alpha-\sum_k h_{ik}^\alpha\omega_j^k-\sum_k h_{kj}^\alpha\,\omega_i^k+\sum_\beta h_{ij}^\beta\omega_\beta^\alpha\\&=\sum_k h_{ijk}^\alpha\omega^k,\end{aligned}$$

即

$$a^{\alpha}_{ijk}=h^{\alpha}_{ijk}. \tag{5.4.34}$$

将(5.4.34)代入(5.4.32)，利用 Codazzi 方程 $h^{\alpha}_{ijk}=h^{\alpha}_{ikj}$，得

$$v^{\alpha}_{i}=\sum_{j} h^{\alpha}_{jji}.$$

因此，$v^{\alpha}_{i}=0$ 的充要条件是 $\sum_{j} h^{\alpha}_{jji}=0$，即 M^n 具有平行平均曲率向量(见本章§1，习题 12)．

注 定理5.4.7最早是由 E. A. Ruh 和 J. Vilms 发现的(见 Trans. AMS, 149(1970), 569—573)，这里的证明采用 S. S. Chern和 S. I. Goldberg(见 Amer. J. Math., 97(1975), 133—147)所给出的方法

习　题

1．设 $M^1\to \boldsymbol{R}^3$ 是通常欧氏空间的闭曲线(即 $n=1$, $p=2$)，于是

$$\dim \boldsymbol{F}(1,\ 2)=6.$$

试写出 M^1 的结构方程和全绝对曲率．

2．设 $M^2\to \boldsymbol{R}^3$ 是通常欧氏空间的曲面，利用 Gauss 方程 $d\omega^1_2=K\omega^1\wedge\omega^2$，证明总曲率 K 与曲面上幺正基$(e_1,\ e_2)$的选择无关．

3．设 $S^3\subset \boldsymbol{R}^4$ 是 3 维单位欧氏球面，$M^2\to S^3$ 是等距浸入曲面，且 M^2 是紧致定向的．利用欧氏平行性，试讨论 S^3 中 M^2 的全绝对曲率．

4．设 $f:M\to \boldsymbol{R}$ 是 n 维流形 M 的 C^2 实函数，$P\in M$ 是 f 的一个非蜕化临界点．试证：存在 P 的一个坐标邻域 $(U,\ y^i)$，使得 $y^i(P)=0$，且在整个 U 上 f 可表示为

$$f=f(P)-(y^1)^2-\cdots-(y^{\lambda})^2+(y^{\lambda+1})^2+\cdots+(y^n)^2,$$

其中 λ 是 f 在 P 的指数．(Morse 引理，参考[10]，p. 6.)

5．设 $M^n\to \boldsymbol{R}^{n+p}$ $(n\geqslant 3)$ 是平均曲率为常数的伪脐点子流形，证明：Gauss 映射 $\mathscr{G}:M^n\to G_{n,p}$ 为相似映射的充要条件是 M^n 为 Einstein 流形．

6．设 M^n 是 $\boldsymbol{R}^{n+p}$ 的紧致定向闭子流形，并且它的平均曲率向量在法丛中平行．证明：若 M^n 的截面曲率恒正，则 M^n 是伪脐点子流形．

7．设 $x:M^n\to S^{n+p}\subset \boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 是等距浸入，对于每点 $P\in M^n$，由切空间

$T_P(M^n)$ 和位置向量 $x(P)$ 决定了一个 $(n+1)$ 维定向超平面，把它平移到 $\boldsymbol{R}^{n+p+1}$ 的原点，从而成为 $G_{n+1,p}$ 的一个元素。用这种方式，可以定义广义Gauss 映射 $\mathscr{G}:M^n\to G_{n+1,p}$. 试证：广义 Gauss 映射 $\mathscr{G}$ 为调和的充要条件是 $x:M^n\to S^{n+p}$ 为极小浸入.

［参考］ T. Ishihara, J. London Math. Soc., 26(1982), 104—112; 或陈咸平,“数学年刊”, 4 A(1983), 449—456.

8. 设 $\boldsymbol{H}^{n+p}$ 是常曲率 -1 的单连通双曲空间形式，它可以等距浸入 $n+p+1$ 维 Minkowski 空间 $\boldsymbol{L}^{n+p+1}$. 又设 $x:M^n\to \boldsymbol{H}^{n+p}\subset \boldsymbol{L}^{n+p+1}$ 是等距浸入. 试仿照习题 7, 讨论它的广义 Gauss 映射及其调和性.

［参考］ M. Obata, J. Diff. Geom., 2(1968), 217—223; 及沈一兵. “杭大学报”, 11(1984), No. 3, 311—315.

附录 I 常微分方程组存在定理

定理 设 $X:U(\boldsymbol{R}^n$ 中开集$)\to\boldsymbol{R}^n$ 为 $C^r(r\geqslant1)$映射，则对每一个 $x_0\in U$,

1° 存在一条过 x_0 的曲线 $C:I\to U$ 满足方程

$$\frac{d}{dt}C(t)=X(C(t)),\quad t\in I,\quad I=(-\alpha,\alpha),$$

并且任何这样两条曲线在其定义域的交集上是相同的，

2° 存在 x_0 的一个邻域 $U_0\subset U$, 一个实数 $\alpha>0$ 和一个 C^r 映射 $F:U_0\times I\to\boldsymbol{R}^n$, 其中 $I=(-\alpha,\alpha)$, 使得由 $C_u(t)=F(u,t)$ 定义的过 $u(\in\boldsymbol{R}^n)$的曲线 $C_u:I\to\boldsymbol{R}^n$ 满足微分方程

$$\frac{d}{dt}C_u(t)=X(C_u(t)),\quad t\in I.$$

我们分几个引理来证明这个定理，以$B_b(x_0)$表示$\boldsymbol{R}^n$中以 x_0 为中心. b 为半径的开球，$B_b(x_0)\subset U$. 对$x\in\overline{B}_b(x_0)$, $X(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$. 由于 X 为 C^r 映射，即 f^i 为 $\overline{B}_b(x_0)$ 上 C^r 函数，故 f^i 及其导数在 $\overline{B}_b(x_0)$ 上是有界的，从而可选取数 M, 使得

$$\left.\begin{aligned}&\|X(x_1)\|\leqslant M,\\&\|X(x_1)-X(x_2)\|\leqslant M\|x_1-x_2\|,\end{aligned}\right.\quad x_1,x_2\in\overline{B}_b(x_0).$$

引理 1 设 $X:U\to\boldsymbol{R}^n$ 为 Lipschitz 映射，即

$$\|X(x_1)-X(x_2)\|\leqslant K\|x_1-x_2\|,\quad x_1,x_2\in U,$$

其中K为常数，且设 $\|X(x)\|\leqslant M$, $x\in\overline{B}_b(x_0)$, 则存在一个 $\alpha>0$ 和唯一的 C^1 曲线 $C:[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\to\overline{B}_b(x_0)$使得

$$(1)\qquad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}C(t)=X(C(t)),\\C(t_0)=x_0.\end{cases}$$

证明 由题设可取一个数 N 使得对 $x_1, x_2\in U$, $\|X(x_1)-X(x_2)\|\leqslant N|x_1-x_2|$, 且对于 $x\in\overline{B}_b(x_0)$, $\|X(x)\|\leqslant N$. 不妨设 $b<1$, 令 $\alpha=\dfrac{b}{N}$, 方程组(1)等价于积分方程

$$(2)\qquad C(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X(C(s))ds.$$

令 $C_0(t)=x_0$, 且归纳地定义

$$C_{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}X(C_n(s))ds,\quad t\in[t_0-\alpha,\ t_0+\alpha].$$

因为
$$\|C_1(t)-x_0\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|X(C_0(s))\|ds\leqslant N\alpha=b,$$
$$t\in[t_0-\alpha,\ t_0+\alpha],$$

故
$$C_1(t)\subset\overline{B}_b(x_0).$$

现设
$$C_{n-1}(t)\subset\overline{B}_b(x_0),\quad t\in[t_0-\alpha,\ t_0+\alpha],$$

则
$$\|C_n(t)-x_0\|\leqslant\int_{t_0}^{t}\|X(C_{n-1}(s))\|ds\leqslant b,\quad t\in[t_0-\alpha,\ t_0+\alpha],$$

故所有的曲线

$$C_n:[t_0-\alpha,\ t_0+\alpha]\to\overline{B}_b(x_0).$$

此外,由上述条件及引理的条件

$$\begin{aligned}&\|C_{n+1}(t)-C_n(t)\|\\ &\leqslant N\int_{t_0}^{t}\|C_n(s)-C_{n-1}(s)\|ds\\ &\leqslant N^n|t-t_0|^{n-1}\int_{t_0}^{t}\|C_1(s)-C_0(s)\|ds\\ &\leqslant N^{n+1}\alpha^n=Nb^n\to 0\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

因为 $\overline{B}_b(x_0)$ 为紧致集, 故 $C_n(t)$ 一致收敛于连续曲线 $C(t)$, 它满足方程(2), 故 $C(t)$ 为 C^1 曲线且满足方程组(1). 特别, 若 X 为 C^r 映射,则易见 $C(t)$ 为 C^{r+1} 曲线. 最后,设 $\widetilde{C}(t)$ 是满足方程(1)另一条曲线,则

$$\|C_n(t)-\tilde{C}(t)\|\leqslant N^{n+1}\alpha^n\to 0$$

从而在 C 和 $\tilde{C}$ 的公共定义域上 $C(t)=\tilde{C}(t)$. ▮

引理 2(Gronwall 不等式) 设 f、$g:[a, b)\to \boldsymbol{R}$ 都为连续且非负函数，若

$$f(t)\leqslant A+\int_a^t f(s)g(s)ds,\quad A \text{ 为非负常数},\quad t\in[a, b),$$

则
$$f(t)\leqslant A\exp\int_a^t g(s)ds.$$

证明 先设 $A>0$. 令

$$h(t)=A+\int_a^t f(s)g(s)ds,\quad t\in[a, b),$$

则 $h(t)>0$, $h(t)\geqslant f(t)$ 且 $h'(t)\leqslant h(t)g(t)$. 因此

$$\frac{h'(t)}{h(t)}\leqslant g(t).$$

积分之则得
$$f(t)\leqslant h(t)\leqslant A\exp\int_a^t g(s)ds.$$

若 $A=0$, 则可用任何 $\varepsilon>0$ 来代替上述 A, 从而

$$f(t)\leqslant\varepsilon\exp\int_a^t g(s)ds,$$

于是也有 $f(t)\leqslant 0$. ▮

引理 3 设 X 如引理 1 中所述，以 $F_t(x_0)$ 表示方程

$$\frac{d}{dt}C(t)=X(C(t)),\quad C(0)=x_0$$

的解，则存在 x_0 的一个邻域 V 和一个正数 $\varepsilon>0$, 使得对于任何 $y\in V$, 存在唯一的一条曲线 $C(t)=F_t(y)$. 它满足方程

$$\frac{d}{dt}C(t)=X(C(t)),\quad t\in[-\varepsilon, \varepsilon] \text{ 和 } C(0)=y.$$

此外有

$$(3)\qquad \|F_t(x_1)-F_t(x_2)\|\leqslant e^{N|t|}\|x_1-x_2\|.$$

证明 引理的前一部分得自引理 1 的证明过程，譬如可取

$$V=B_{\frac{b}{2}}(x_0),\quad \varepsilon=\frac{b}{2N}.$$

为证后半部分，令

$$f(t)=\|F_t(x_1)-F_t(x_2)\|.$$

因为 $F_t(x_i)$是方程

$$\frac{d}{dt}C(t)=X(C(t)),\quad C(0)=x_i$$

的解，故由引理1的证明过程有

$$f(t)=\left\|\int_0^t[X(F_s(x_1))-X(F_s(x_2))]ds+x_1-x_2\right\|$$

$$\leqslant\|x_1-x_2\|+N\int_0^{|t|}f(s)ds,$$

利用引理2即得

$$f(t)\leqslant\|x_1-x_2\|e^{N|t|}.$$ ∎

上式表明 $F_t(y)$ 关于初始值 y 是连续的. 连同引理1即知 $F_t(y)$ 关于$(t,\ y)$是连续的.

注 如果X明显地依赖于 t 和参数 ρ，则同样的结论也成立，即设 $F^{\rho}_{t,t_0}(x)$是方程

$$\frac{d}{dt}C(t)=X(C(t),t,\rho),\quad C(t_0)=x$$

的解，则 $F^{\rho}_{t,t_0}(x)$关于$(t_0,\ t,\ \rho,\ x)$是连续的，并且关于 x 对于 t_0, t, ρ 一致地满足 Lipschitz 条件.

引理4 设引理1中的 X 为 C^k 类，$1\leqslant k<\infty$，且设 $F_t(x)$ 如引理3中所述，则局部地 $F_t(x)$关于 x 为 C^k 类，关于 t 为 C^{k+1} 类.

证明 令 $\psi(t,\ x)\in\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n)$是线性化方程

$$\text{(4)}\qquad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\psi(t,\ x)=DX(F_t(x))\cdot\psi(t,\ x),\\ \psi(0,\ x)=I\text{(恒同)}\end{cases}$$

的解，其中 $DX(y):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 是 X 在点 y 的微分. 因为映射 $T:\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n)\to\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n)$，$\psi\mapsto T\psi=DX(F_t(x))\cdot\psi(t,\ x)$ 关于 ψ 对 $(t,\ x)$ 在每个 (t_0, x_0) 的邻域一致地满足 Lipschitz 条件，由引理 3 的证明得知 $\psi(t,\ x)$ 关于 $(t,\ x)$ 是连续的(关于 $\mathscr{L}(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^n)$ 上的范数拓扑).

以下来证 $DF_t(x)=\psi(t,\ x)$. 为此令

$$\theta(t,\ h)=F_t(x+h)-F_t(x),$$

利用引理 1 及(4)式有

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \theta(t,\ h)-\psi(t,\ x)\cdot h
&=\int_0^t\{X(F_s(x+h))-X(F_s(x))\}ds\\
&\quad-\int_0^t\{DX(F_s(x))\cdot\psi(s,\ x)\}\cdot h\,ds\\
&=\int_0^t\{X(F_s(x+h))-X(F_t(x))-DX(F_s(x))\\
&\quad\cdot[F_s(x+h)-F_s(x)]\}ds\\
&\quad+\int_0^t DX(F_s(x))\cdot[\theta(s,\ h)-\psi(s,\ x)\cdot h]ds.
\end{aligned}
$$

因为 X 为 $C^r(r\geqslant1)$ 类，据 DX 的定义，对于任给的 $\varepsilon>0$ 存在一个 $\delta>0$，使得 $\|h\|<\delta$ 时，第一个积分的值 $\leqslant\int_0^t\varepsilon\|F_s(x+h)-F_s(x)\|ds\leqslant\varepsilon\int_0^t e^{N|t|}\|h\|ds\leqslant\varepsilon\|h\|A$，$t<\delta$，式中 A 为常数，从而由引理 2 得

$$\|\theta(t,\ h)-\psi(t,\ x)\cdot h\|\leqslant\varepsilon\|h\|M,\qquad M\text{ 为常数},$$

此即表示 $DF_t(x)\cdot h=\psi(t,\ x)\cdot h$. 因此 $F_t(x)$ 关于 t 和 x 的两个微分都存在且连续，即 $F_t(x)$ 关于 $(t,\ x)$ 是 C^1 的.

再用归纳法来证明 $F_t(x)$ 是 C^k 的. 因为

$$\frac{d}{dt}F_t(x)=X(F_t(x))$$

故
$$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}F_t(x)=DX(F_t(x))\cdot X(F_t(x)),$$
$$\frac{d}{dt}DF_t(x)=DX(F_t(x))\cdot DF_t(x),$$
因为右边都是 C^{k-1} 类的，根据归纳假设其解是 C^{k-1} 类的，因此 $F_t(x)$本身也为 C^k 类. ▌

附录 II　Sard 定理

Sard 定理　设 $U\subset \boldsymbol{R}^m$ 是开集，$F: U\to \boldsymbol{R}^n$ 是光滑映射，令 $A=\{a\in U \mid DF\ a$ 的秩$<n\}$，则$F(A)\subset \boldsymbol{R}^n$的Lebesgue测度为零.

证明　对m用归纳法. 当 $m=0$ ($\boldsymbol{R}^0$ 由独点组成)时，定理显然为真.

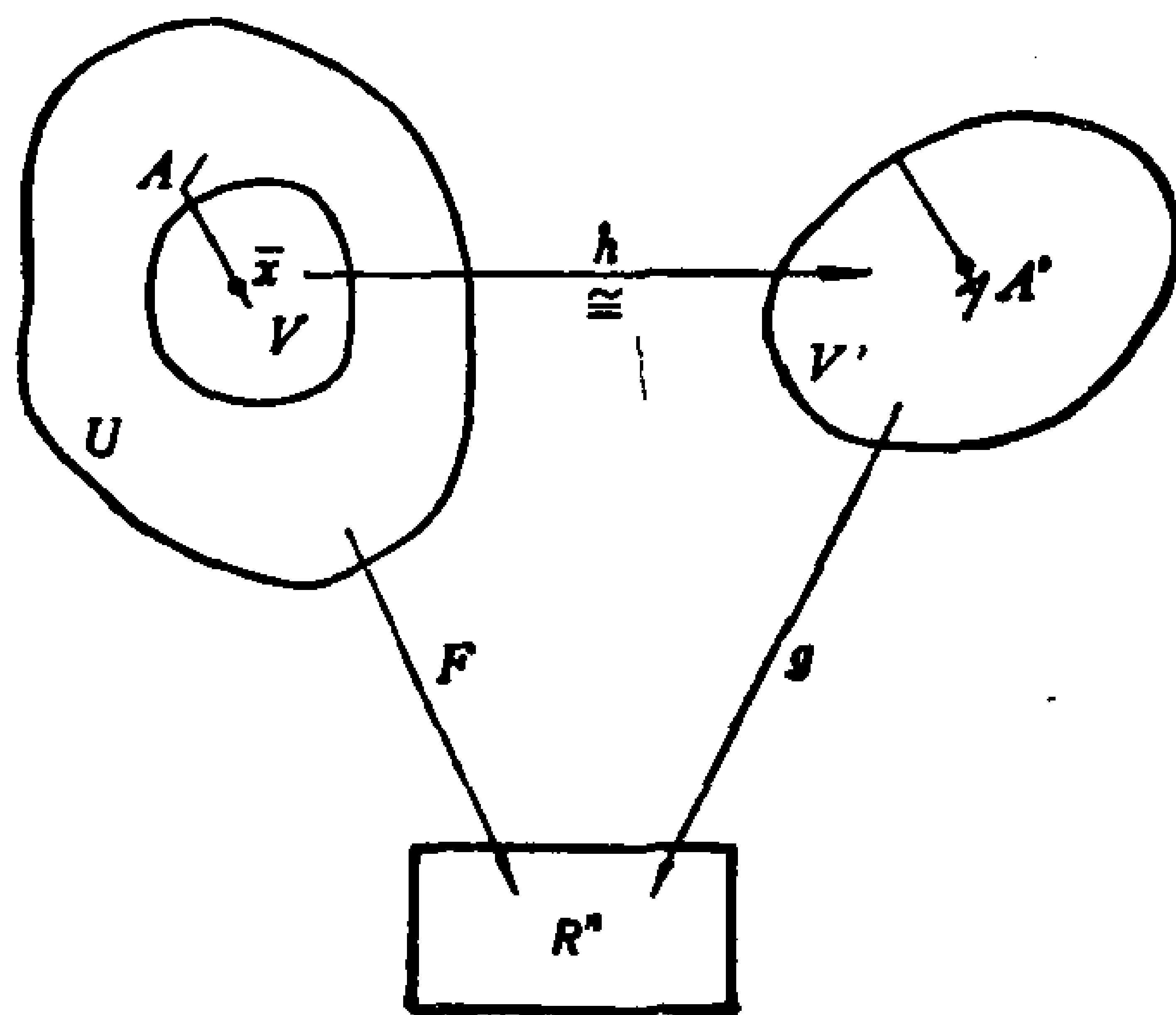
令 $A_1\subset A$ 表示所有使一阶导数 $dF(x)$ 为零的点 $x\in U$ 组成的集合. 一般地，令 A_i 表示使 F 的所有阶数$\leqslant i$ 的偏导数为零的那些点 $x\in U$ 的集合. 于是得一闭集递减序列

$$A\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_i\supset\cdots.$$

第一步. 像集 $F(A-A_1)$的测度为零.

不妨设 $n\geqslant 2$，因为当 $n=1$ 时，$A=A_1$. 记得 Fubini 定理说：一个可测集 $C\subset \boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^1\times \boldsymbol{R}^{n-1}$ 若与每个超平面{常数}$\times \boldsymbol{R}^{n-1}$都交于 $n-1$ 维零测度集，则 C 的测度必为零.

对于每个 $\bar{x}\in A-A_1$，找一个开邻域 $V\subset \boldsymbol{R}^m$，使得 $F(V\cap A)$ 有零测度. 因为 $A-A_1$ 被可数个这种邻域所覆盖，故 $F(A-A_1)$ 的测度为零.



由于 $\bar{x}\in A_1$，故存在某个非零偏导数，例如为 $\frac{\partial F^1}{\partial x^1}(\bar{x})\neq 0$. 考虑由

$$h(x)=(F^1(x),\ x^2,\ \cdots,\ x^m)$$

定义的映射 $h:U\to \boldsymbol{R}^m$，因为 $Dh(\bar{x})$ 满秩，h 将 $\bar{x}$ 的某个邻域 V 微分同胚地映到一个开集 V' 上．于是，复合映射 $g=F\circ h^{-1}$ 将 V' 映到 $\boldsymbol{R}^n$ 中．注意 g 的临界集 A' 正好是 $h(V\cap A)$，因此 g 的临界值的集合 $g(A')=F(V\cap A)$.

对于每个 $(t,\ x^2,\ \cdots,\ x^m)\in V'$，注意 $g(t,\ x^2,\ \cdots,\ x^m)$ 属于超平面 $\{t\}\times\boldsymbol{R}^{n-1}\subset\boldsymbol{R}^n$，于是 g 将超平面变到超平面．令

$$g_t:(t\times\boldsymbol{R}^{m-1})\cap V'\to t\times\boldsymbol{R}^{n-1}$$

表示 g 的限制．注意 $t\times\boldsymbol{R}^{m-1}$ 的点是 g_t 的临界点当且仅当它是 g 的临界点；因为 g 的一阶偏导数的矩阵具有形状

$$\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \left(\frac{\partial g_t^i}{\partial x^j}\right)\end{pmatrix}.$$

根据归纳假定，g_t 的临界值集在 $t\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的测度为零，因此 g 的临界值集与每个超平面 $t\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ 交于一个零测度集．集合 $g(A')$ 是可测的，因为它能表示作紧致子集的可数并．因此，由 Fubini 定理，集合 $g(A')=F(V\cap A)$ 的测度为零．第一步证毕．

第二步．当 $i\geqslant 1$ 时，像集 $F(A_i-A_{i+1})$ 的测度为零．

对于每个 $\bar{x}\in A_i-A_{i+1}$，存在某个 $i+1$ 阶非零偏导数 $\frac{\partial^{i+1}F^r}{\partial x^{s_1}\cdots\partial x^{s_{i+1}}}\neq 0$．于是函数

$$w(x)=\frac{\partial^i F^r}{\partial x^{s_2}\cdots\partial x^{s_{i+1}}}$$

在点 $\bar{x}$ 为零，但 $\frac{\partial w}{\partial x^{s_1}}(\bar{x})\neq 0$．为确定起见，不妨设 $s_1=1$，则以

$$h=(w(x),\ x^2,\ \cdots,\ x^m)$$

定义的映射 $h:U\to \boldsymbol{R}^m$ 将 x 的某个邻域 V 微分同胚地映到一个开集 V' 上. 注意 h 将 $A_i\cap V$ 映到超平面 $\{0\}\times \boldsymbol{R}^{m-1}$ 中. 再考虑

$$g=F\circ h^{-1}:V'\to \boldsymbol{R}^n,$$

令 $\tilde{g}:(0\times \boldsymbol{R}^{m-1})\cap V'\to \boldsymbol{R}^m$ 表示 g 的限制. 由归纳法知, $\tilde{g}$ 的临界值集在 $\boldsymbol{R}^n$ 中有零测度, 但 $h(A_i\cap V)$ 中的每点肯定是 $\tilde{g}$ 的临界点(因为所有阶数 $\leqslant i$ 的偏导数均为零). 因此

$$\tilde{g}h(A_i\cap V)=F(A_i\cap V)$$

的测度为零. 由 A_i-A_{i+1} 被可数个这种集合 V 所覆盖, 故 $F(A_i-A_{i+1})$ 的测度等于零.

第三步. 当 i 足够大时, 像集 $F(A_i)$ 的测度为零.

令 $I^m\subset U$ 为边长等于 δ 的 m 维方体. 若 i 充分大(确切地说, $i>m/n-1$), 我们可证明 $F(A_i\cap I^m)$ 有零测度. 因为 A_i 能被可数个这种方体所覆盖, 故 $F(A_i)$ 的测度为零.

从 Taylor 定理, I^m 的紧致性及 A_i 的定义, 我们可知: 当 $x\in A_i\cap I^m$, $x+h\in I^m$ 时,

$$F(x+h)=F(x)+R(x,\ h),$$

其中

$$\|R(x,\ h)\|\leqslant c\|h\|^{i+1}, \tag{1}$$

这里常数 c 仅依赖于 F 和 I^m. 现在重分 I^m 为边长等于 δ/r 的 r^m 个立方体, 令 I_1 为重分中的一个立方体, 它包含 A_i 的一个点 x, 则 I_1 的任何一点能写作 $x+h$, 其中

$$\|h\|\leqslant\sqrt{m}(\delta/r). \tag{2}$$

从(1)推出 $F(I_1)$ 在一个边长为 a/r^{i+1} 以 $F(x)$ 为中心的立方体中, 其中 $a=2c(\sqrt{m}\delta)^{i+1}$ 是常数. 因此, $F(A_i\cap I^m)$ 包含在最

多 r^m 个立方体的并中，这些立方体的总体积为

$$V=r^m(a/r^{i+1})^n=a^n r^{m-(i+1)n}.$$

若 $i+1>m/n$，则显然当 $r\to\infty$ 时，$V\to 0$；所以 $F(A_i\cap I^m)$ 的测度必为零．Sard 定理证毕。

注 这个证明引自[9]。

附录III 黎曼淹没

设(M, g)和(N, g')是黎曼流形，可微映射$f: M \to N$为淹没，则对于每点$x \in N$，$f^{-1}(x)$是M的$m-n$维子流形，其中$m=\dim M$，$n=\dim N$. $f^{-1}(x)$称为在x的纤维. 若M上的一个向量场总是与纤维相切(或正交)，则称为竖直(或水平)向量场. 如果淹没f的切映射f_*保持水平向量的内积不变，则f称为黎曼淹没.

对于黎曼淹没$f: M \to N$，用$\mathscr{H}$和$\mathscr{V}$分别表示M的切空间在水平向量子空间和竖直向量子空间上的投影. 设∇是(M, g)的黎曼联络. 定义$(1, 2)$型张量场T如下:

$$T_E F = \mathscr{H} \nabla_{\mathscr{V}E}(\mathscr{V}F) + \mathscr{V} \nabla_{\mathscr{V}E}(\mathscr{H}F),$$

其中E, F是M上任意向量场. 张量场T具有下列性质:

(a) T_E是M切空间上的反对称算子，它保持水平(竖直)子空间不变;

(b) T是竖直的，即$T_E = T_{\mathscr{V}E}$;

(c) 对于竖直向量场V和W，T具有对称性，即

$$T_V W = T_W V.$$

性质(c)可直接从竖直分布的可积性得出.

我们再定义$(1,2)$型张量A如下:

$$A_E F = \mathscr{V} \nabla_{\mathscr{H}E}(\mathscr{H}F) + \mathscr{H} \nabla_{\mathscr{H}E}(\mathscr{V}F),$$

它具有下列性质:

(a′) A_E是M切空间上的反对称算子，它保持水平(竖直)子空间不变;

(b′) A是水平的，即$A_E = A_{\mathscr{H}E}$;

(σ') 对于水平向量场X和Y，A具有反对称性，即

$$A_XY=-A_YX.$$

性质(σ')将在下面的引理2中给出证明.

M上一个基本向量场是M的水平向量场X，它与N的某个向量场X'是f相关的，即$f_*X_p=X'_{f(p)}$，$p\in M$. N上每个向量场X'有唯一的水平提升X，它是M的基本向量场. 因此，$X\leftrightarrow X'$是M的基本向量场与N的向量场之间的1—1对应.

引理1 设X和Y是M的基本向量场，那末，

(1) $g(X, Y)=g'(X', Y')\circ f$;

(2) $\mathscr{H}[X, Y]$是基本向量场，它对应于$[X', Y']$;

(3) $\mathscr{H}\nabla_XY$是基本向量场，它对应于$\nabla'_{X'}Y'$，其中∇'是(N, g')的黎曼联络.

证明 (1)是黎曼淹没的定义的直接结果. (2)可从

$$f_*[X, Y]=[f_*X, f_*Y]$$

得到. 现证明(3). 对于M的任何基本向量场X，Y和Z，我们有

$$\begin{aligned}2g(\nabla_XY, Z)=&Xg(Y, Z)+Yg(X, Z)-Zg(X, Y)\\&-g(X, [Y, Z])-g(Y, [X, Z])\\&+g(Z, [X, Y]).\end{aligned}$$

但因$X(g(Y, Z))=X(g'(Y', Z')\circ f)=X'(g'(Y', Z'))\circ f$，因此

$$g'(\nabla'_{X'}Y', Z')=g(\nabla_XY, Z).$$

由于X，Y，Z的任意性，所以∇_XY与$\nabla'_{X'}Y'$是f相关的.

引理2 若X和Y是M的水平向量场，则

$$A_XY=\frac{1}{2}\mathscr{V}[X, Y].$$

证明 首先，有

$$\mathscr{V}[X, Y]=\mathscr{V}\nabla_X Y-\mathscr{V}\nabla_Y X=A_X Y-A_Y X.$$

因此，我们只要证明性质(c′)，或等价地证明 $A_X X=0$. 不妨设 X 是基本向量场，于是对任何竖直向量 V，我们有

$$g(\nabla_V X, X)=\frac{1}{2}V(g(X, X))=V(g'(X', X')\circ f$$
$$=(f_* V)g'(X', X')=0.$$

因为 $f_* V=0$, 故 $[V, X]=\nabla_V X-\nabla_X V$ 是竖直的. 所以,

$$0=g(\nabla_V X, X)=g(\nabla_X V, X)=-g(V, \nabla_X X)$$
$$=-g(V, A_X X).$$

由 A 的定义，$A_X X$ 是竖直的，故上式意味着 $A_X X=0$.

据 T 和 A 的定义，直接可验证下列

引理3 设 X 和 Y 是 M 的水平向量场，V 和 W 是 M 的竖直向量场，那末,

(1) $\nabla_V W=T_V W+\hat{\nabla}_V W$;　　(2) $\nabla_V X=\mathscr{H}\nabla_V X+T_V X$;

(3) $\nabla_X V=A_X V+\mathscr{V}\nabla_X V$;　　(4) $\nabla_X Y=\mathscr{H}\nabla_X Y+A_X Y$;

(5) 若X是基本向量场，则 $\mathscr{H}\nabla_V X=A_X V$.

这里 $\hat{\nabla}$ 表示每个纤维关于其诱导度量的黎曼联络，易见 $\hat{\nabla}_V W=\mathscr{V}\nabla_V W$.

引理4 设 X, Y, V, W 如引理3, 那末,

(1) $(\nabla_V A)_W=-A_{T_V W}$;　　$(\nabla_X A)_W=-A_{A_X W}$;

(2) $(\nabla_X T)_Y=-T_{A_X Y}$;　　$(\nabla_V T)_Y=-T_{T_V Y}$.

证明 我们只证(1)，其他是类似的. 设 E 是 M 上任意向量场，则

$$(\nabla_V A)_W E=\nabla_V(A_W E)-A_{\nabla_V W}E-A_W(\nabla_V E).$$

因 A 是水平的，故 $A_W=0$. 另一方面，有

$$A_{\nabla_V W}E=A_{\mathscr{V}\nabla_V W}E=A_{T_V W}E.$$

因此便得(1). ▮

由此易得

引理 5 若 X 是水平向量场，U, V, W 是竖直向量场，则

$g((\nabla_U A)_X V, W) = g(T_U V, A_X W) - g(T_U W, A_X V)$.

引理 6 设 X 和 Y 是水平向量场，V 和 W 是竖直向量场，则有

(1) $g((\nabla_E A)_X Y, V)$ 关于 X 和 Y 是反对称的；

(2) $g((\nabla_E T)_V W, X)$ 关于 V 和 W 是对称的.

引理 7 设 X, Y 和 Z 是水平向量场，V 是竖直向量场，则有

$$\mathscr{C} g((\nabla_Z A)_X Y, V) = \mathscr{C} g(A_X Y, T_V Z),$$

其中 $\mathscr{C}$ 表示关于 X, Y, Z 循环求和.

证明 因为这是张量方程，故不妨设 X, Y, Z 都是基本向量，而且设 $[X, Y]$, $[Y, Z]$, $[Z, X]$ 都是竖直的. 于是，由引理 2，$\frac{1}{2}[X, Y] = A_X Y$. 因此，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} g([[X, Y], Z], V) \\
&= g([A_X Y, Z], V) \\
&= g(\nabla_{A_X Y} Z, V) - g(\nabla_Z (A_X Y), V).
\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&g(\nabla_{A_X Y} Z, V) \\
&= g(T_{A_X Y} Z, V) = -g(Z, T_{A_X Y} V) \\
&= -g(Z, T_V (A_X Y)) = g(T_V Z, A_X Y).
\end{aligned}$$

这样，应用 Jacobi 恒等式，得

$$\mathscr{C} g(\nabla_Z (A_X Y), V) = \mathscr{C} g(T_V Z, A_X Y).$$

于是，余下只要证明 $\mathscr{C} g(\nabla_Z (A_X Y), V) = \mathscr{C} g((\nabla_Z A)_X Y, V)$. 然而，

$$\begin{aligned}
&g(\nabla_Z (A_X Y), V) - g((\nabla_Z A)_X Y, V) \\
&= g(A_{\nabla_Z X} Y, V) + g(A_X (\nabla_Z Y), V).
\end{aligned}$$

上式右边第一项就是$-g(A_Y(\mathscr{H}\nabla_Z X), V)$，由于假设$[X, Z]$为竖直，这就化为$-g(A_Y(\mathscr{H}\nabla_X Z), V)$，由此可见，投影算子$\mathscr{H}$可被删去．这样，引理7立即得证．▮

现在用R表示M的曲率张量，$\hat{R}$表示每个纤维（作为M的子流形）的曲率张量．

定理1 设U, V, W, F是M的竖直向量场，X是水平向量场，则

$$g(R(U, V)W, F)$$
$$=g(\hat{R}(U, V)W, F)+g(T_U W, T_V F)-g(T_V W, T_U F),$$
$$g(R(U, V)W, X)$$
$$=g((\nabla_U T)_V W, X)-g((\nabla_V T)_U W, X).$$

设R'是(N, g')的曲率张量，它的水平提升仍用R'表示，即对于M的水平向量场X, Y, Z, W，我们令

$$g(R'(X, Y)Z, W)=g'(R'(f_*X, f_*Y)f_*Z, f_*W).$$

定理2 设X, Y, Z, H是M的水平向量场，V是竖直向量场，则

$$g(R(X, Y)Z, H)$$
$$=g(R'(X, Y)Z, H)+2g(A_X Y, A_Z H)$$
$$-g(A_Y Z, A_X H)+g(A_X Z, A_Y H),$$
$$g(R(X, Y)Z, V)$$
$$=-g((\nabla_Z A)_X Y, V)-g(A_X Y, T_V Z)$$
$$+g(A_Y Z, T_V X)-g(A_X Z, T_V Y).$$

证明 因为这些都是张量方程，故不妨设X, Y和Z是基本向量，它们的李括号是竖直的．于是$[X, Y]=2A_X Y$．把基本向量场$\mathscr{H}\nabla_Y Z$写为$\nabla'_Y Z$．于是$\nabla_Y Z=\nabla'_Y Z+A_Y Z$．由引理3得

$$\nabla_X\nabla_Y Z=\nabla'_X\nabla'_Y Z+A_X\nabla'_Y Z+A_X A_Y Z+\mathscr{V}\nabla_X A_Y Z,$$
$$\nabla_{[X, Y]}Z=2A_Z A_X Y+2T_{A_X Y}Z.$$

因此有 $R(X, Y)Z$

$$
\begin{aligned}
&=\nabla'_X\nabla'_Y Z-\nabla'_Y\nabla'_X Z+A_X A_Y Z-A_Y A_X Z\\
&\quad -2A_Z A_X Y-2T_{A_X Y}Z+\mathscr{V}\nabla_X A_Y Z\\
&\quad -\mathscr{V}\nabla_Y A_X Z+A_X\nabla'_Y Z-A_Y\nabla'_X Z\\
&=R'(X, Y)Z+A_X A_Y Z-A_Y A_X Z-2A_Z A_X Y\\
&\quad -2T_{A_X Y}Z+\mathscr{V}(\nabla_X A_Y Z-\nabla_Y A_X Z)\\
&\quad +A_X\nabla'_Y Z-A_Y\nabla'_X Z,
\end{aligned}
$$

其中已利用 $\mathscr{H}[X, Y]=0$, 即 $f_*[X, Y]=0$.

上式与H作内积便得定理的第一个方程. 上式与 V 作内积得

$$
\begin{aligned}
&g(R(X, Y)Z, V)\\
&=-2g(T_{A_X Y}Z, V)+g(\nabla_X A_Y Z, V)-g(\nabla_Y A_X Z, V)\\
&\quad +g(A_X\nabla'_Y Z, V)-g(A_Y\nabla'_X Z, V).
\end{aligned}
$$

另一方面,在引理 7 的证明中,已有

$$g(T_{A_X Y}Z, V)=g(T_V Z, A_X Y).$$

而且,由于$[X, Y]$为竖直的,可得

$$
\begin{aligned}
&g((\nabla_X A)_Y Z, V)-g((\nabla_Y A)_X Z, V)\\
&=g(\nabla_X A_Y Z, V)-g(A_Y\nabla_X Z, V)\\
&\quad -g(\nabla_Y A_X Z, V)+g(A_X\nabla_Y Z, V).
\end{aligned}
$$

因此,我们有

$$
\begin{aligned}
&g(R(X, Y)Z, V)\\
&=-2g(T_V Z, A_X Y)+g((\nabla_X A)_Y Z, V)\\
&\quad -g((\nabla_Y A)_X Z, V).
\end{aligned}
$$

据此及引理 6 和 7, 便得定理的第二个方程. ▮

同理可得下列定理.

定理3 若X和Y是水平向量场, V 和 W 是竖直向量场,则

$$g(R(X, V)Y, W)$$
$$=g((\nabla_V A)_X Y, W)-g((\nabla_X T)_V W, Y)$$
$$+g(A_X V, A_Y W)-g(T_V X, T_W Y).$$

现用 K, K' 和 $\hat{K}$ 分别表示 (M, g), (N, g') 和纤维的截面曲率，我们有

定理4 设 X 和 Y 是单位正交的水平向量场，V 和 W 是单位正交的竖直向量场，则

$$K(V, W)=\hat{K}(V, W)+g(T_V W, T_V W)$$
$$-g(T_V V, T_W W),$$
$$K(X, V)=g((\nabla_X T)_V V, X)+g(A_X V, A_X V)$$
$$-g(T_V X, T_V X),$$
$$K(X, Y)=K'(f_* X, f_* Y)-3g(A_X Y, A_X Y).$$

这里第一个方程就是纤维（作为M的子流形）的 Gauss 方程。

作为应用，考虑具有双不变黎曼度量的李群 G，设H是它的闭子群，于是商空间 G/H 上的黎曼结构可由自然投射 $\pi: G\to G/H$ 所特征，这个 π 是一个淹没．它的纤维，即 G 模H的左旁集，是全测地的，故张量 $T=0$．设X和 Y 是 G 的左不变水平向量场，即X和 Y 属于李代数 H 在李代数 G 中的正交补集，由引理1，$A_X Y=\frac{1}{2}\mathscr{V}[X, Y]$属于李代数 H，并且我们知道

$$K(X, Y)=\frac{1}{4}|[X, Y]|^2.$$

因此，由定理 4，

$$K'(f_* X, f_* Y)=\frac{1}{4}|[X, Y]|^2+\frac{3}{4}|\mathscr{V}[X, Y]|^2$$
$$=\frac{1}{4}|\mathscr{H}[X, Y]|^2+|\mathscr{V}[X, Y]|^2$$

这给出了商空间 G/H 的截面曲率。

附录IV 广义极大原理

设M是m维完备黎曼流形，$x_0\in M$为一固定点．对于任一点$x\in M$，命$\gamma:[0,r]\to M$是连接x_0与x的正规极小测地线．用$\gamma'(t)$和$\mathrm{Ric}(\gamma'(t))$分别表示γ的单位切向量和M关于$\gamma'(t)$的Ricci曲率．于是，定义

$$K_\gamma(x)=\min_{0<s<r}\left\{\frac{m-1}{r-s}-\frac{1}{(r-s)^2}\int_s^r(t-s)^2\,\mathrm{Ric}(\gamma'(t))\,dt\right\}.$$

若x不是x_0的割点(参考第四章§3习题2)，则上述γ是唯一的；否则，这样的γ可能不止一条．为此，我们定义

$$K(x)=\begin{cases}K_\gamma(x), & \text{当 } x \text{ 不是 } x_0 \text{ 的割点;}\\ \inf\limits_\gamma K_\gamma(x), & \text{当 } x \text{ 为 } x_0 \text{ 的割点，} \gamma \text{ 为从 } x_0 \text{ 到 } x \\ & \text{的所有极小测地线.}\end{cases}$$

引入简写记号

$$\widetilde{\log}\cdot\overset{\text{(def)}}{=\!=}\log(\cdot+2).$$

定理1(广义极大原理) 设M是完备黎曼流形，u是M上有上界的C^2函数．那末，对于任一固定点$x_0\in M$，存在M上的点列$\{x_k\}\subset M$，使得

(i) $u(x_k)\geqslant u(x_0)$, $\quad\lim\limits_{k\to\infty}u(x_k)=\sup u$;

(ii) $$|\nabla u|(x_k)=\frac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)r(x_k)}{k(r^2+2)(\widetilde{\log}\,r^2+2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2)};$$

(iii) $\triangle u(x_k)$

$$<|\nabla u|(x_k)\left\{K(x_k)-\frac{\left(r-\frac{2}{r}\right)(\widetilde{\log}\,r^2+2)+2r}{(r^2+2)(\widetilde{\log}\,r^2+2)}\right.$$

$$-\frac{2\left(1-\frac{1}{k}\right)r}{(r^2+2)(\widetilde{\log}\, r^2+2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2)}\Bigg\},$$

其中 $r=r(x_k)=\operatorname{dist}(x_0, x_k)$ 是 M 上从 x_0 起始的距离函数。

证明 对于任何固定的 $k>0$, 考虑 M 上函数

$$F_k(x)=\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2(x)]^{1/k}}.$$

因为 $F_k(0)=(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, 2)^{-1/k}$ 及 $\lim\limits_{r(x)\to\infty} F_k(x)=0$, 故 F_k 必在某点 $x_k\in M$ 达到它的极大值.

若 x_k 不是 x_0 的割点,则距离函数 $r(x)=\operatorname{dist}(x_0, x)$ 在 x_k 可微,从而函数 F_k 在 x_k 也可微. 于是,

$$\nabla F_k(x_k)=0, \quad \Delta F_k(x_k)\leqslant 0.$$

即在 x_k 有 $\quad \nabla u(x_k)=\dfrac{2(u(x_k)-u(x_0)+1)r\nabla r}{k(r^2+2)(\widetilde{\log}\, r^2+2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2)},$

$$\begin{aligned}\Delta u(x_k)\leqslant&\frac{4r\langle\nabla u, \nabla r\rangle+2(u(x_k)-u(x_0)+1)(1+r\Delta r)}{k(r^2+2)(\widetilde{\log}\, r^2+2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2)}\\&-\frac{4(u(x_k)-u(x_0)+1)r^2[1+(\widetilde{\log}\, r^2+2)^{-1}]}{k(r^2+2)^2(\widetilde{\log}\, r^2+2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2)}\\&-\frac{4\left(1+\frac{1}{k}\right)(u(x_k)-u(x_0)+1)r^2}{k(r^2+2)^2(\widetilde{\log}\, r^2+2)^2(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\, r^2)^2}.\end{aligned}$$

由 x_k 的性质, $F_k(x_k)\geqslant F_k(x_0)>0$, 故 $u(x_k)-u(x_0)+1>0$. 注意到 $\langle\nabla r, \nabla r\rangle=1$ 和 $\Delta r(x_k)\leqslant K(x_k)$ (参考第四章 §3 习题 4), 从上两式便得定理的 (ii) 和 (iii).

若 x_k 是 x_0 的割点, 则考虑一条从 x_0 到 x_k 的极小测地线 γ. 在 γ 上取定一点 $\bar{x}_0$, 它充分接近 x_0, 并且, $\bar{x}_0$ 与 x_k 不共轭. 记

$$\delta=r(\bar{x}_0)=\operatorname{dist}(x_0, \bar{x}_0).$$

取测地线段 $\gamma|_{[\bar{x}_0,x_k]}$ 的一个正则邻域 $N_{\bar{x}_0}\subset M$，使得在 $N_{\bar{x}_0}$ 内没有 $\bar{x}_0$ 的割点. 用 $\bar{r}(x)=\text{dist}(\bar{x}_0, x)$ 表示 $N_{\bar{x}_0}$ 中以 $\bar{x}_0$ 为起点的距离函数，由三角不等式，易知对 $x\in N_{\bar{x}_0}$ 有

$$\bar{r}(x)+\delta\geqslant r(x),$$

特别是

$$\bar{r}(x_k)+\delta=r(x_k).$$

在 $N_{\bar{x}_0}$ 上考虑函数

$$\bar{F}_k(x)=\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}(\bar{r}(x)+\delta)^2]^{1/k}}.$$

我们有

$$\bar{F}_k(x_k)=F_k(x_k)\geqslant F_k(x)\geqslant \bar{F}_k(x),$$

即在 $N_{\bar{x}_0}$ 中，函数 $\bar{F}_k$ 在 x_k 达到局部极大值. 现在 x_k 不是 $\bar{x}_0$ 的割点，因此 $\bar{F}_k$ 在 x_k 可微. 类似于前面的计算，可得 $\nabla\bar{F}_k(x_k)=0$ 和 $\triangle\bar{F}_k(x_k)\leqslant 0$ 的表达式. 再令 $\bar{x}_0\to x_0$，即 $\delta\to 0$，便得定理的(ii)和(iii).

现在证明定理的(i). 由 x_k 的取法，$F_k(x_k)\geqslant F_k(x_0)$，即

$$\frac{u(x_k)-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x_k)]^{1/k}}\geqslant\frac{1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,2]^{1/k}}\geqslant\frac{1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x_k)]^{1/k}},$$

故得 $u(x_k)\geqslant u(x_0)$. 以下证明 $\lim\limits_{k\to\infty}u(x_k)=\sup u$，换言之，我们要证明：对任何给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $k>N$ 时，

$$\sup u-\varepsilon<u(x_k)<\sup u+\varepsilon.$$

上面第二个不等式是平凡的. 为证第一个不等式，我们只要证明：对于任意的 $x\in M$ 和任何 $\varepsilon>0$，在我们的点列中总有一点 x_k，使得

$$u(x)-\varepsilon<u(x_k).$$

用反证法，若不然，则存在一点 $x\in M$ 和某个 $\varepsilon>0$，使得在一个子点列 $\{x_{k'}\}\subset\{x_k\}$ 上成立

$$u(x_{k'})+\varepsilon\leqslant u(x).$$

因为 $\lim_{k'\to\infty}\{(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x))/(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}2)\}^{1/k'}=1$，因此，对于充分大的 k'，有

$$u(x_{k'})+\varepsilon>\left[\frac{\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x)}{\widetilde{\log}\log 2}\right]^{1/k'}u(x_{k'}).$$

于是，

$$\begin{aligned}F_{k'}(x)&=\frac{u(x)-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x)]^{1/k'}}\geqslant\frac{u(x_{k'})+\varepsilon-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x)]^{1/k'}}\\&>\frac{u(x_{k'})-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\log 2]^{1/k'}}\geqslant\frac{u(x_{k'})-u(x_0)+1}{[\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,r^2(x_{k'})]^{1/k'}}\\&=F_{k'}(x_{k'}),\end{aligned}$$

即

$$F_{k'}(x_{k'})<F_{k'}(x).$$

这与点 $x_{k'}$ 的定义矛盾．定理完全证毕．

由 $K(x)$ 的定义，当 M 的 Ricci 曲率有下界时，$K(x)$ 就有上界．因此，定理 1 的一个直接推论是

推论 设 M 是 Ricci 曲率有下界的完备黎曼流形，u 是 M 上有上界的 C^2 函数，则存在点列 $\{x_k\}\subset M$，使得

(i) $\lim_{k\to\infty}u(x_k)=\sup u$;

(ii) $\lim_{k\to\infty}|\nabla u|(x_k)=0$;

(iii) $\lim_{k\to\infty}\Delta u(x_k)\leqslant 0$.

完备流形上的广义极大原理最早是由 H. Omori 给出 [J. Math. Soc. Japan, 19(1967), 205—214]．后来，丘成桐与郑绍远作了改进和简化证明 [Comm. Pure Appl. Math., 28(1975), 333—354]．这里的叙述基本上参照该文．

如果 M 是常曲率空间的完备子流形，根据第五章 §1 习题 7，只要 M 的纯量曲率有下界，就可保证 M 的 Ricci 曲率有下界．

特别，当M是欧氏空间的逆紧浸入子流形时，我们可用欧氏距离函数ρ来代替M上的距离函数r. 这时有

定理 2 设$x: M \to R^N$是完备黎曼流形M到欧氏空间的逆紧等距浸入，u是M上有上界的C^2函数，则对于任一固定点$x_0 \in M$，存在点列$\{x_k\} \subset M$，使得

(i) $\lim\limits_{k \to \infty} u(x_k) = \sup u$;

(ii) $$|\nabla u|(x_k) \leqslant \frac{2(u(x_k) - u(x_0) + 1)\rho}{k(\rho^2 + 2)(\widetilde{\log}\rho^2 + 2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,\rho^2)};$$

(iii) $$\Delta u(x_k) \leqslant \frac{2m(u(x_k) - u(x_0) + 1)}{k(\rho^2 + 2)(\widetilde{\log}\,\rho^2 + 2)(\widetilde{\log}\,\widetilde{\log}\,\rho^2)} \times [1 + \rho \sup |H|],$$

其中$m = \dim M$, $\rho = \rho(x_k) = |x_k - x_0|$是从$x_0$起始的欧氏距离函数，$H$是$M$的平均曲率向量.

推论 在定理 2 的同样条件下，若M的平均曲率有界，则

(i) $\lim\limits_{k \to \infty} u(x_k) = \sup u$;

(ii) $\lim\limits_{k \to \infty} |\nabla u|(x_k) = 0$;

(iii) $\lim\limits_{k \to \infty} \Delta u(x_k) \leqslant 0$.

定理 2 的证明类似于定理 1, 其中对欧氏距离函数ρ, $\Delta\rho$是可以具体计算的(参考第四章 § 4). 详细证明留给读者作练习.

参考文献

[1] Bishop, R. L. & Crittenden, R. J., "Geometry of Manifolds", Acad. Press, 1964, New York & London.

[2] Boothby, M., "An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry", Acad. Press, 1975, New York–San Francisco–London.

[3] Chern, S. S., "Minimal Submanifolds in a Riemannian Manifold", Univ. of Kansas, Tech. Rep. 19, 1968, USA.

[4] Chern, S. S., do Carmo, M. & Kobayashi, S., "Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length", Func. Anal. & Rela. Fiel., Springer–Verlag, 1970, 59—75.

[5] Chern, S. S. & Lashof, R. K., "On the total curvature of immersed manifolds", Amer. J. Math., 79(1957), 306～318.

[6] Dieudonné, J., "Foundations of Modern Analysis", Acad. Press, 1960, New York.

[7] Eells, J. & Lemaire, L., "A report on harmonic maps", Bull. London, Math. Soc., 10(1978), 1～68.

[8] Kobayashi, S. & Nomizu, K., "Foundations of Differential Geometry" I., II., Interscience, 1963, 1969, New York.

[9] Milnor, J. W., "Topology from the differentiable viewpoint", Univ. Press of Virginia Char., 1965, USA.

[10] Milnor, J. W., "Morse Theory", Princeton Univ. Press, 1963, USA.

[11] Simons, J., "Minimal varieties in Riemannian manifolds", Ann of Math., 88(1968), 62—105.

[12] Warner, F. W., "Foundations of differentiable manifolds and Lie groups", Springer–Verlag, 1983, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo

[13] Willmore, T. J., "Total Curvature in Riemannian Geometry", Halsted Press, 1982, New York.

[14] 苏步青、胡和生等,"微分几何",高等教育教出版社, 1979, 北京.

[15] 丘成桐、孙理察,"微分几何",科学出版社, 1988, 北京.

[16] M. P. do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, Inc., 1976, New Jersey.

[17] M. Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Vol. I.—V., Publish or Perish. Inc., 1979, Berkeley.

[18] J. Cheeger & D. G. Ebin, "Comparison Theorems in Riemannian Geometry", North-Holland Publishing Company, 1975. Amsterdam, Oxford; Amer. Elsev. Pub. Com. Inc., New York.

[19] D. Singley, Rocky Moun. J. Math., 5(1975), 135—144.

索　引

三　划

四　划

五 划

六 划

七 划

八　划

九　划

十　划

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝黎曼几何初步
作者＝白正国　沈一兵　水乃翔　　郭孝英
页数＝３７０
ＳＳ号＝１０１００９５９
出版日期＝１９９２年０４月第１版

前言
目录